TABLA DE CONTENIDOS

Olimpiada Nacional de Ciencias (ONC)
Matemática, diversificado
Contenidos declarativos, procedimentales y algunos comentarios explicativos.
Año 2025, contenidos de todas las fases de la olimpiada.

Olimpiada Nacional de Ciencias

APTITUDES

- ingenio
- meticulosidad
- concentración
- precisión
- imaginación
- formalismo

ÁREAS

Conjuntos y Lógica

Razonamiento

Aritmética

Geometría euclidiana

Geometría analítica

Álgebra

Teoría de funciones

Combinatoria

Estadística y otros temas

CONJUNTOS Y LÓGICA

Fundamentos

Importante

Manejo teórico y operativo de conceptos como el de conjunto vacío, conjunto universo, cardinalidad, y las relaciones de pertenencia ($\in$) y contención ($\subseteq$). Conjuntos numéricos: conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), enteros ($\mathbb{Z}$), racionales ($\mathbb{Q}$) y los números reales ($\mathbb{R}$).

Operaciones con conjuntos

Representación gráfica, enumerativa y descriptiva de la unión o intersección de dos o más conjuntos. Representación gráfica, enumerativa y descriptiva de la diferencia o diferencia simétrica de dos conjuntos, y del complemento de un conjunto dentro de un universo dado (notación: A^C, es el complemento del conjunto A). Pares ordenados, ternas ordenadas, $n-$adas ordenadas, construcción gráfica y enumerativa del producto cartesiano de dos conjuntos dados, construcción enumerativa del producto cartesiano de tres o más conjuntos. Cardinalidad de un conjunto. Cardinalidad de productos cartesianos de dos o más conjuntos. Principio de inclusión y exclusión para cualquier cantidad de conjuntos. Operaciones con conjuntos infinitos. Leyes de DeMorgan en conjuntos.

Ejemplo de operación con conjuntos infinitos: En $\mathbb{Z}$, ¿Cuál es la intersección del conjunto de los múltiplos de tres con los pares?

Subconjuntos

Capacidad de enumerar todos los subconjuntos de un conjunto dado que posea una cantidad reducida de elementos (por ejemplo: el conjunto de las vocales). Subconjuntos de k elementos dentro de un conjunto de n elementos (con $k \leq n$). Contención propia ($\subset$) e impropia ($\subseteq$). Escritura de subconjuntos infinitos de los enteros o naturales en forma descriptiva.

A manera de ejemplo, los múltiplos de tres pueden codificarse en forma descriptiva así: $\{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Proposiciones

Concepto de proposición y valor de verdad. Concepto de proposición abierta. Concepto de proposición cuantificada, vía los cuantificadores existencial ($\exists$) y universal ($\forall$).

Una proposición abierta es aquella que tiene variables indeterminadas y no cuantificadas, propiamente hablando no es una proposición pues no tiene valor de verdad, a menos que se determine el valor de sus variables. Por ejemplo: *"El número x es par"* es una proposición abierta. Puede concebirse como un conjunto de proposiciones.

Conectivos lógicos y tablas de verdad

Importante

Construcción de tablas de verdad para los conectivos lógicos básicos (conjunción $\wedge$, disyunción $\vee$, negación $\neg$, condicional $\rightarrow$ y bicondicional $\leftrightarrow$) para dos o más proposiciones simples. Proposición compuesta. Valor de verdad de una proposición compuesta. Valor de verdad de una proposición simple dados los valores de una o varias proposiciones compuestas en las que está incluida. Equivalencia lógica. Negación de proposiciones cuantificadas.

Leyes de la lógica

Leyes operativas de los conectivos lógicos (asociatividad, conmutatividad, idempotencia, etc.). Leyes de De Morgan. Uso de las leyes para verificar la equivalencia lógica de proposiciones compuestas sin usar tablas de verdad.

RAZONAMIENTO

Argumentación y demostración

Importante

Capacidad de elaborar argumentos convincentes. Capacidad de elaborar demostraciones de forma directa, por contradicción (y su caso especial para proposiciones condicionales: reducción al absurdo), por contrapuesta, entre otros métodos.

En particular, si al alumno se le solicita un argumento, se espera una explicación clara y convincente, aunque no debe cubrir absolutamente todos los detalles ni ser enteramente formal. Una demostración en matemáticas, por el contrario, debe ser clara, convincente, formal y sin agujeros lógicos.

Acertijos lógicos y problemas de razonamiento

Importante

Pueden ser de diversa índole: problemas que involucren la subdivisión en casos o el análisis meticuloso de los datos ofrecidos; problemas sobre personajes que mienten o dicen la verdad; la utilización de balanzas o contenedores de manera secuencial para realizar ingeniosamente cálculos o comparaciones; búsqueda de errores en razonamientos; problemas que versen sobre mensajes codificados u operaciones aritméticas inventadas específicamente para esta competencia; búsqueda de estrategias óptimas para ser aplicadas a juegos matemáticos o situaciones varias; etc.

Esta sección se combina con otros contenidos de cualquiera de las áreas a evaluar, por lo que es incluida de manera frecuente.

Patrones

Identificación y aplicación de patrones establecidos sobre figuras geométricas, tablas de datos, números u otros objetos para la determinación de un objeto final, después de un número finito de aplicaciones de la regla o patrón. Determinación de un objeto límite, obtenido de aplicar una regla o patrón un número infinito de veces, provisto que la secuencia se estabilice (que converja).

Algunos problemas que consisten en la detección de patrones no son problemas matemáticos válidos, pues pueden depender del punto de vista y tener infinitas respuestas posibles. Tales problemas no serán evaluados. Ejemplo de un problema inválido: "Hallar el siguiente número en la sucesión: 2, 4, 6, ...". El problema es inválido pues tiene infinitas posibles respuestas, el patrón podría continuar así: "2, 4, 6, 12, 14, 16, 22, 24, 26, 32, 34, 36, 42, 44, 46, ... ", o así: "2, 4, 6, 6, 8, 10, 10, 12, 14, 14, 16, 18, 18, ..." Note cuán diferente parece el último patrón si se lee de tres en tres (el patrón parece completo), o si se pone atención únicamente a los números que se repiten y los que no se repiten, que ocurren de manera alternada (el patrón parece incompleto pues el 2 debería repetirse). Incluso podría no haber un patrón, tal y como se entiende la palabra.

ARITMÉTICA

Axiomas

Comprensión de las leyes o axiomas algebraicos de los números, con respecto a las operaciones de suma y multiplicación (conmutatividad, asociatividad, distributividad, existencia del elemento neutro y la unidad, y existencia de elementos simétricos e inversos). Capacidad de verificar y justificar si las leyes se cumplen o no para una nueva operación cuya definición es indicada en un problema.

Divisibilidad

Importante

Definición de la relación de divisibilidad. Diferencia entre la relación de divisibilidad ($4 \mid 12$ es verdadero) y la operación de división ($12 \div 4 = 3$). Algoritmo de la división (dividendo = divisor × cociente + residuo). Propiedades de la divisibilidad en $\mathbb{N}$ (reflexividad, antisimetría y transitividad). Definiciones de divisor, múltiplo, divisor común, múltiplo común, máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (MCM) para dos o más números. Argumentos vía paridad (por ejemplo: se puede utilizar en un argumento el hecho de que la suma de varios números puede ser impar solamente si entre los sumandos hay una cantidad impar de impares). Criterios de divisibilidad para números que sean potencias de dos (2,4,8,16,...), potencias de diez, potencias de cinco, y los criterios de 3, 7, 9 y 11. Algoritmo de Euclides para la determinación del MCD de dos números. La función aritmética τ: número de divisores positivos de un número natural. La función aritmética σ: la suma de los divisores positivos de un número natural.

Por ejemplo, $\tau(10) = 4$, porque 10 tiene 4 divisores positivos distintos. Por otro lado, $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$. El símbolo τ se lee tau, mientras que σ se lee sigma.

En algunos textos tradicionales, el algoritmo de Euclides para el MCD es conocido como el "método de las divisiones sucesivas".

Primos

Definiciones de número primo y número compuesto. Definición de primos relativos. Criterio para verificar si un número dado es primo (verificar si es múltiplo de algún número mayor que 1 y menor o igual a su raíz cuadrada). Construcción de la criba de Eratóstenes. Definición de primos gemelos. Definición de números perfectos.

Operatoria

Importante

Suma, resta, multiplicación y división de números enteros, racionales y reales. Manejo de las operaciones mencionadas tanto en decimales como con fracciones. Fracciones equivalentes y simplificación de las mismas. Conversión de números racionales entre las formas siguientes: número mixto, fracción (propia o impropia), número decimal y porcentaje. Potenciación y radicación de enteros y racionales. Leyes de los exponentes y de las raíces. Leyes de los signos para la multiplicación o división de números. Jerarquía de las operaciones incluyendo signos de agrupación. Conjugación de radicales que aparecen en el denominador de fracciones. Definición de factorial y su jerarquía en las operaciones.

Teorema Fundamental de la Aritmética

Importante

Conocimiento y comprensión del enunciado del teorema. Factorización en primos de un número natural dado. Determinación del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números vía sus factores primos. Capacidad de determinar si un número es divisor de otro vía la comparación de sus factorizaciones primas. Fórmulas de la función τ y la función σ en términos de la factorización prima del número.

Orden

Relaciones de orden ($<, >, \leq$ y $\geq$). Capacidad de ordenar de menor a mayor o de mayor a menor un conjunto dado de números enteros o racionales, posiblemente expresados mediante combinaciones de operaciones aritméticas. La desigualdad cuadrática como herramienta para elaborar argumentos.

La desigualdad cuadrática dice que todo número real elevado al cuadrado da un resultado no negativo. Se puede usar para elaborar argumentos como el siguiente: el máximo valor que puede tomar la expresión $25 - x^2 - y^2$ es 25, sin importar el valor que tomen las variables en $\mathbb{R}$.

Sucesiones y series

Importante

Definiciones de: sucesión aritmética, sucesión geométrica, serie aritmética y serie geométrica. Fórmula de Gauss para la suma de enteros consecutivos. Determinación de términos específicos en sucesiones definidas recursivamente o sucesiones que poseen una forma cerrada. Fórmula para series geométricas finitas e infinitas.

Le llamamos forma cerrada a una manera de saber el resultado sin tener que calcular cierta operación que posee un patrón. Por ejemplo, si se suman los enteros positivos impares desde 1 hasta cierto número impar, el resultado siempre es un cuadrado perfecto. Note que la suma de los primeros cuatro impares $1 + 3 + 5 + 7$ da como resultado el cuadrado de 4, que es 16.

Ecuaciones de recurrencia

Concepto de recurrencia, definición de términos iniciales y de solución. Verificación de que una fórmula cerrada dada sea solución de una ecuación de recurrencia. Conocimiento de las ecuaciones de recurrencia para series aritméticas, series geométricas y factoriales.

No se evaluará métodos específicos para la resolución de ecuaciones de recurrencia, como el método del polinomio característico; sin embargo, se puede esperar que el alumno conjeture la solución de una ecuación simple, empleando su ingenio, y verifique que cumple las condiciones para ser solución.

Ecuaciones diofantinas

Ecuaciones sencillas en dos o más variables con soluciones enteras. Por ejemplo, encontrar los pares de enteros (x, y) tales que sean solución de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$. Ecuaciones diofantinas que se resuelven vía la aplicación del teorema fundamental de la Aritmética, por ejemplo, $(x - 1)(y + 2) = 77$. La ecuación diofantina lineal. Conocimiento de algunas ternas pitagóricas como (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17), (20,21,29), etcétera.

No es necesario estudiar la fórmula de Euclides para las ternas pitagóricas, aunque es un bonito tema digno de ser explorado.

Lema de Euclides

Conocimiento del enunciado y aplicación del lema de Euclides, que dice: si p es un primo que divide al producto ab, entonces p debe dividir a alguno de los factores: a o b (o tal vez a ambos).

A manera de ejemplo, considere el ejercicio siguiente: demuestre que los únicos números n tales que $n^2 - n$ sea divisible por 7 son los múltiplos de 7 y aquellos que dejan residuo 1 al dividirlos por 7. **Demostración:** por el lema de Euclides, el hecho que 7 divida a $n(n-1)$ implica que 7 debe dividir a n, o bien a $n-1$. Estos casos corresponden a los múltiplos y los que dejan residuo 1, respectivamente. En las fases finales de la competencia, el uso del lema de Euclides podría ser en contextos más complicados que este ejemplo.

Pequeño teorema de Fermat

Conocimiento del enunciado y aplicación del pequeño teorema de Fermat, que dice: si p es un primo, entonces p es divisor de $a^p - a$, para cualquier número entero a.

En la olimpiada, cualquier problema en el que se pueda aplicar el pequeño teorema de Fermat también se podrá resolver sin dicho teorema, pero es una herramienta que podría agilizar cálculos o simplificar argumentos o demostraciones.

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Razonamiento espacial

Capacidad de imaginar figuras sólidas construidas a partir de otras más simples. Estrategias para contar aristas, caras y vértices de figuras sólidas construidas a partir de cubos, tetraedros regulares, prismas y otras figuras simples. Rotación, traslación y reflexión de figuras sólidas o planas, posiblemente iterando o combinando dichas transformaciones.

Conceptos básicos

Definición de segmento de recta y su notación, definición de circunferencia, arcos de circunferencia, rectas tangentes a circunferencias, rectas secantes a circunferencias, cuerdas, diámetro y radio de circunferencias. Proporcionalidad como factor de conversión, y conversiones entre medidas lineales, cuadráticas y cúbicas (por ejemplo, de metros cúbicos a centímetros cúbicos)

Polígonos

Clasificación y nomenclatura de las figuras según el número de lados y otras propiedades (triángulos, cuadriláteros, paralelogramos, rombos, cuadrados, rectángulos, romboides, trapecios, trapecios isósceles, trapezoides, pentágonos, hexágonos, etc.). Clasificación de triángulos según sus ángulos (obtusángulo, rectángulo, acutángulo) y según sus lados (equilátero, isósceles, escaleno). Perímetro y área de figuras geométricas (cuadrado, rectángulo, círculo, triángulo, paralelogramo, trapecio, etc.). Fórmula de Herón para el área de un triángulo. Fórmula trigonométrica para el área de un triángulo. Definición de vértices, lados y diagonales de polígonos.

Los romboides también son llamados deltoides. Entre los matemáticos de Guatemala es común la nomenclatura de Julio Rey Pastor, en la que los romboides NO son un caso particular de los paralelogramos, sino que corresponden a la figura geométrica que intuitivamente se identifica con los barriletes (deltoides). En muchos libros europeos y norteamericanos, se le llama romboide al paralelogramo que no es rombo. En la terminología de Rey Pastor, a esta figura se le llama simplemente "paralelogramo general". La ventaja de decir deltoide es que el término no es ambiguo, no importando la escuela geométrica que se siga.

Figuras sólidas

Volumen y área superficial de algunas figuras geométricas sólidas (cubo, esfera, cilindro, y prismas rectos, pirámides o conos con cualquier figura de base). Definición de vértices, aristas y caras de figuras sólidas en las que tales conceptos apliquen. Definición de poliedro y conocimiento de los sólidos platónicos. Conocimiento de la característica de Euler.

La característica de Euler es una propiedad combinatórica poseída por una gran familia de poliedros. En las pruebas nunca será evaluado de manera directa, pero su conocimiento puede facilitar la solución de algunos problemas muy particulares.

Ángulos y temas afines

Importante

Comprensión y manejo de las medidas angulares en grados y radianes. Conversión entre medidas. Ángulos coterminales. Teorema de la suma de los ángulos internos en un triángulo (180 grados), sumas de los ángulos internos en cuadriláteros (regulares o irregulares). Ángulos entre paralelas (correspondientes, opuestos por el vértice, alternos internos y alternos externos). Sectores circulares (perímetro y área). Definición de polígono inscrito y polígono circunscrito a una circunferencia. Cálculo de ángulos internos de polígonos regulares y de polígonos estrellados. Cuadriláteros cíclicos y la propiedad que indica el valor de la suma de ángulos opuestos en uno de esos cuadriláteros.

Semejanza y congruencia

Importante

Concepto y reconocimiento de triángulos semejantes y congruentes. Reconocimiento de figuras geométricas (triángulos y otras) rotadas, trasladadas o dilatadas. Criterios de congruencia de triángulos: lado-lado-lado, lado-ángulo-lado y ángulo-lado-ángulo. Criterios de semejanza de triángulos: lado-lado-lado, lado-ángulo-lado y ángulo-ángulo.

Teoremas fundamentales

Teorema de los ángulos en la base de un triángulo isósceles (Pons asinorum). Teorema de Pitágoras. El teorema del ángulo central y el del ángulo inscrito. Teorema de Tales sobre el triángulo inscrito en una semi-circunferencia. Los teoremas de Tales sobre rectas paralelas. Teorema de las diagonales de un paralelogramo y teorema de las diagonales de un deltoide. Conocimiento de los enunciados y la capacidad de aplicarlos en la resolución de problemas.

Trigonometría

Definición de seno, coseno y tangente, en términos de los lados de un triángulo rectángulo. Valores del seno, coseno y tangente para ángulos notables: $0°, 30°, 45°, 60°$ y $90°$. Resolución de problemas que involucran calcular o expresar un lado o un ángulo de un triángulo rectángulo, en términos de otros lados y ángulos. Identidad pitagórica trigonométrica: $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

Geometría del triángulo

Rectas importantes en el triángulo: bisectrices angulares, bisectores perpendiculares o mediatrices, medianas, alturas. Puntos importantes en el triángulo: centroide o gravicentro, circuncentro, ortocentro, incentro. Construcción del incírculo y del circuncírculo. Teorema de la bisectriz. Aplicación de la ley de senos y la ley de cosenos.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Conceptos básicos

Importante

Concepto del plano cartesiano y las coordenadas de un punto. Ecuación de la recta: forma punto-pendiente, forma estándar y forma general. Interceptos en x y en y. Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales y dos variables por el método gráfico. Curvas y ecuaciones: interpretación de los puntos de intersección como soluciones de un sistema de ecuaciones (no necesariamente lineales). Trazo aproximado de curvas mediante tablas de puntos. La ecuación del círculo: forma general y forma estándar de círculos con centro en el origen o fuera de él.

Cónicas

Definiciones de las distintas curvas cónicas: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. Puntos, segmentos y rectas asociados: vértices, focos, lado recto, eje mayor, eje menor, semi-eje mayor, semi-eje menor, centro, directrices, ejes de simetría, distancia focal. Ecuación general de las cónicas, ecuación estándar de cada tipo de cónica y conversión entre ellas (completación de cuadrados o expansión algebraica). Localización del vértice de una parábola mediante el procedimiento algebraico (conversión de la ecuación de la parábola a la forma estándar).

Vectores

Conceptos de vector, escalar, magnitud, dirección y componentes horizontal y vertical. Representación cartesiana, polar y gráfica de un vector. Cálculo de la suma de vectores (en forma cartesiana y gráfica), y la multiplicación de un vector por un escalar (en forma cartesiana, polar y gráfica). Conversión entre la forma cartesiana y la forma polar de vectores (en ambas direcciones), esto es, obtención de las componentes horizontal y vertical de un vector dado en forma polar, y obtención de la magnitud y dirección de un vector dado en forma cartesiana.

Producto escalar

Diferenciación entre el producto de un vector por un escalar, y el producto escalar de dos vectores. Cálculo del producto escalar en términos de las coordenadas. Cálculo del producto escalar en forma polar (la fórmula del coseno). Relación entre el producto escalar y la perpendicularidad de vectores.

ÁLGEBRA

Axiomas

Propiedades de las operaciones suma y producto en el contexto algebraico (asociatividad, conmutatividad, cerradura, distributividad, elemento neutro, elemento simétrico e inversos).

Conceptos básicos

Definición de polinomio, término, monomio, binomio, trinomio, etc. Diferenciación entre los conceptos de variable y constante. Diferenciación entre los conceptos de dato (constante conocida) e incógnita (constante desconocida). Definición del grado de un polinomio, clasificación de polinomios según el grado (lineal, cuadrático, cúbico, cuártico, quíntico).

Operatoria algebraica

Valuación de expresiones algebraicas para valores específicos de las variables. Operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división) aplicadas a polinomios y a expresiones racionales. Radicales aplicados a monomios. Expansión de productos y simplificación de expresiones algebraicas, reducción de términos semejantes en polinomios y simplificación de expresiones racionales ya expresadas en términos de factores repetidos. Algoritmo de la división para polinomios (división larga con cociente y residuo). División sintética de polinomios.

Las expresiones racionales son fracciones tales que su numerador y su denominador son polinomios. Composición de polinomios (como funciones).

Productos notables

Binomio al cuadrado, producto de binomios conjugados, binomio al cubo, producto de binomios con un término común, cuadrado de un polinomio. Expansión de un binomio a cualquier potencia natural mediante el triángulo de Pascal.

Casos de factorización

Importante

Casos de factorización en una o más variables: factor común, trinomio cuadrado perfecto, tetranomio cubo perfecto, diferencia de cuadrados, suma y diferencia de cubos, suma y diferencia de potencias impares, diferencia de potencias pares, factorización por agrupación, factorización de trinomios cuadráticos más generales (por cualquier método), factorización de Sophie Germain, factorización por la fórmula cuadrática, factorización por división larga, factorización por división sintética.

Sophie Germain es el nombre más común para el caso de factorización de expresiones del tipo x^4+4y^4. De manera general, se incluyen aquí factorizaciones vía suma y resta de términos cuidadosamente elegidos.

Casos avanzados de factorización

Factorización de Argand: $x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$, factorización de Gauss: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

Divisibilidad de polinomios

Definición de divisibilidad **para polinomios**. Propiedades de la divisibilidad (notar que la antisimetría no aplica en polinomios, pero sí aplican la transitividad y reflexividad). Definiciones de múltiplo, divisor, múltiplo común, divisor común, mínimo común múltiplo y máximo común divisor. Algoritmo de Euclides para la determinación del MCD de dos polinomios.

Este algoritmo de Euclides es la generalización algebraica del método de divisiones sucesivas que aparece en el apartado de Aritmética.

Teorema fundamental del álgebra

Definición de raíz de un polinomio. El teorema del factor. El teorema del residuo. Conocimiento del enunciado del teorema fundamental del Álgebra para polinomios con coeficientes reales o complejos. Concepto de polinomio cuadrático irreducible y de número complejo. Números complejos conjugados y el teorema de las raíces conjugadas.

El teorema fundamental del Álgebra dice que todo polinomio con coeficientes reales se puede factorizar hasta el punto que todos los factores sean polinomios lineales o cuadráticos irreducibles, con coeficientes reales. En los números complejos, todo polinomio se puede factorizar totalmente en factores lineales.

Otras técnicas y teoremas

Las fórmulas de Cardano-Vieta, regla de los signos de Descartes, teorema de las raíces racionales de un polinomio,

Ecuaciones, desigualdades e inecuaciones

Importante

Diferenciar entre una ecuación y una identidad algebraica. Resolución de ecuaciones lineales mediante despeje algebraico. Resolución de ecuaciones cuadráticas por completación de cuadrados, casos de factorización y fórmula cuadrática. Discriminante de un polinomio cuadrático y su relación con la naturaleza de las raíces. Resolución de ecuaciones polinomiales, solamente si puede lograrse vía los casos de factorización. Despejes que involucran funciones inversas. Concepto de inecuación ($\neq$) y desigualdad ($<, >, \leq$ y $\geq$). Resolución de una inecuación o desigualdad lineal en una variable. Resolución de una inecuación o desigualdad polinomial o racional en una variable. Resolución de ecuaciones y desigualdades con valores absolutos. Representación gráfica (recta numérica) y por intervalos de la solución. Sistemas de ecuaciones lineales en pocas variables (entre 2 y 6, típicamente).

En los exámenes se aplica el convenio de notación siguiente: un intervalo abierto se representa con paréntesis, en tanto que un intervalo cerrado con corchetes. Así por ejemplo, el intervalo abierto de 3 a 5 es (3,5), mientras que el intervalo cerrado sería [3,5].

Desigualdades y ecuaciones en tres o más variables

Llevar a cabo argumentos que dependan de una o varias aplicaciones de la desigualdad cuadrática en su versión algebraica. Por ejemplo, se puede demostrar que $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ multiplicando ambos miembros por 2, pasando a restar los términos de la derecha y así construyendo tres cuadrados perfectos: $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$, y ésta última es cierta por la suma de tres desigualdades cuadráticas. De manera análoga, la ecuación $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 0$ sólo puede darse si todas las variables son iguales (para que los interiores de los cuadrados se anulen). Esto requiere la aplicación del caso de igualdad de la desigualdad cuadrática: a^2 sólo puede anularse donde a se anule. Definición de media aritmética, media geométrica y la desigualdad AMGM. La desigualdad del triángulo.

La desigualdad cuadrática en el contexto algebraico dice que toda expresión algebraica elevada al cuadrado es mayor o igual a cero. Por ejemplo $(x - \frac{1}{x})^2 \geq 0$, para cualquier $x \neq 0$.

Números complejos

Conceptos de número complejo, número imaginario puro, parte real, parte imaginaria, conjugado de un complejo, módulo y argumento de un número complejo (magnitud y dirección, si se interpreta al complejo como un vector). Las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división de números complejos. Cálculo de potencias de números complejos, en particular, de la unidad imaginaria. Factorización de la suma de cuadrados en los complejos: $x^2 + y^2 = (x + \mathrm{i}\, y)(x - \mathrm{i}\, y)$.

TEORÍA DE FUNCIONES

Conceptos básicos

Importante

Definición de relación y de función. Distintas interpretaciones de una función: fórmula algebraica, representación gráfica, tabla de datos. Suma de funciones, multiplicación de funciones, composición de funciones. Definición de función inversa. Cálculo de funciones inversas. Interpretación gráfica de la función inversa como una reflexión. Definición y obtención de dominios y rangos de funciones. Definición de continuidad y puntos de discontinuidad. Transformaciones de funciones: traslaciones, compresiones, reflexiones y estiramientos.

Funciones algebraicas

Funciones lineales, cuadráticas y polinomiales. Restricción del dominio de una función cuadrática para la obtención de una función inversa. Obtención de máximos y mínimos para algunas funciones básicas: funciones cuadráticas, funciones radicales, semicircunferencias (siempre y cuando no se requiera cálculo diferencial). Funciones racionales: interceptos, asíntotas horizontales, oblicuas y verticales, interceptos de la función con la asíntota horizontal u oblicua, bosquejo de la gráfica. Obtención de las coordenadas del punto que corresponde a una singularidad removible de una función racional no simplificada. Representación gráfica de una singularidad removible.

Funciones trigonométricas

Definición y gráficas de las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente, de una variable real. Expresar funciones trigonométricas en términos de otras funciones trigonométricas. El círculo unitario. Definición de funciones trigonométricas inversas. Gráficas de funciones trigonométricas inversas. Funciones sinusoidales: amplitud, período, ángulo de fase, frecuencia angular, traslación vertical. Obtención de una gráfica a partir de los datos anteriores, y obtención de los datos a partir de la gráfica.

Ecuaciones e identidades trigonométricas

Resolución de ecuaciones polinomiales o racionales en términos de funciones trigonométricas. Uso de identidades trigonométricas para reducir una ecuación que dependa de varias funciones trigonométricas a una ecuación en una sola función trigonométrica. Demostración de identidades trigonométricas. Conocimiento de las identidades de suma y resta de ángulos, doble y triple ángulo, medio ángulo, además de las identidades pitagóricas.

Para demostrar una identidad trigonométrica del tipo $A = B$, donde A, B son expresiones algebraicas que dependen de las funciones trigonométricas, se tomarán como válidas las siguientes opciones: convertir la expresión A en la expresión B, mediante el uso de identidades y simplificación algebraica; convertir por separado ambas expresiones A, B, en una tercera expresión C; o bien, manipular algebraicamente la ecuación $A = B$ hasta reducirla a una identidad conocida u obvia, siempre y cuando los pasos empleados sean reversibles (multiplicar por cero ambos miembros es un paso irreversible, pues no se puede dividir entre cero). En algunas instituciones educativas se enseña solamente el primer método, descartando los otros como erróneos. Ese descarte tradicional no tiene fundamento lógico-matemático.

Funciones exponenciales y logarítmicas

Definición de logaritmo. Leyes de los logaritmos: suma de logaritmos, multiplicación de un logaritmo por una constante, cambio de base. Graficación de funciones exponenciales y logarítmicas, con sus asíntotas. Obtención de la fórmula de una función exponencial o logarítmica a partir de información en forma de tabla o de una gráfica precisa.

Funciones a trozos

Concepto. Gráfica de una función a trozos dada, y obtención de una fórmula por trozos para una gráfica dada. Capacidad de determinar si los puntos limítrofes de los trozos son puntos de continuidad o discontinuidad.

COMBINATORIA

Principios

Importante

Conocer el enunciado y saber aplicar el principio de la suma, el principio de la multiplicación, el principio de inclusión y exclusión para pocos conjuntos (típicamente menos de 6), y el principio de las casillas o principio de Dirichlet.

El principio de inclusión y exclusión nos dice que la cardinalidad de la unión de varios conjuntos es igual a la suma de las cardinalidades individuales, restándole las de las intersecciones a pares, sumándole las de las intersecciones a tríos, y así sucesivamente.

El principio de las casillas dice: si se desea clasificar objetos en casillas, con la posibilidad de colocar uno, ninguno, o varios objetos en cada casilla, y si se cuenta con más objetos que casillas, entonces forzosamente habrá una casilla con más de un objeto.

Conteo

Importante

Conocer la definición de factorial y su conexión con el conteo, la definición de permutación (con repetición y sin repetición), y la definición de combinación (con repetición y sin repetición). Cálculo del número de permutaciones o combinaciones para conjuntos pequeños por exhaustión (sin fórmulas). Cálculo mediante fórmulas del número de permutaciones con repetición ${}_n\overline{P}_k$, permutaciones sin repetición ${}_nP_k$, combinaciones sin repetición ${}_nC_k$, también denotado $\binom{n}{k}$, y combinaciones con repetición ${}_n\overline{C}_k$, también denotado $\left(\binom{n}{k}\right)$. La identidad de Pascal. Problemas de conteo que involucran la división por casos.

Ejemplo de la división en casos: ¿Cuántos números de tres dígitos son tales que su primer y último dígito son iguales? En este problema se observa que forzando al dígito repetido a valer 1, se obtienen números del tipo $1\,\square\,1$, de los cuales hay 10 diferentes, y lo mismo sucede con las otras ocho posibilidades para el dígito repetido, esto es, $9 \times 10 = 90$ números en total.

Grafos
Conceptos de grafo, vértice y arista. Interpretación de poliedros como grafos. Problemas de conteo en grafos. Definición de árbol en el contexto de grafos y definición de grafo conexo.

Ejemplo: Calcular cuántas estrechadas de mano ocurren entre diez personas, si se sabe que cada persona estrechó la mano una vez con cada una de las otras nueve.

ESTADÍSTICA Y OTROS TEMAS

Medidas de tendencia central
Cálculo de moda, media y mediana de un listado de números reales. Elaboración de tablas de frecuencia para un conjunto de datos. Rango de un conjunto de datos. Frecuencia absoluta, relativa y acumulada. Problemas algebraicos que involucran promedios, modas y medianas.

Por ejemplo: Si Juan y Pedro tienen en promedio 20 quetzales, y se sabe que Pedro tiene 24, ¿Cuántos quetzales tiene Juan?

Probabilidad
Concepto básico de probabilidad para un número finito de eventos posibles (tiros de dados, selección de cartas en una baraja, tiros de monedas, etc.). Probabilidad conjunta de eventos independientes. Concepto de eventos mutuamente excluyentes y, entre ellos, los eventos complementarios. Entender la relación entre los principios de conteo: el principio de la suma, el de la multiplicación, y el de inclusión y exclusión con la probabilidad.

Álgebra matricial
Concepto de matrices. Operatoria: suma de matrices, multiplicación de una matriz por un escalar, multiplicación de una matriz por un vector, multiplicación de dos matrices, cálculo del determinante de una matriz cuadrada de 2×2 y de 3×3, por el método de Sarrus. Relación entre las matrices y los sistemas de ecuaciones lineales de varias variables. Relación entre el número de soluciones de un sistema de ecuaciones y el determinante de la matriz asociada.

OBSERVACIONES

Las barras que en el inicio del documento indican la frecuencia con la que se evalúa un área particular se miden en proporción al área más evaluada, que en este caso es Razonamiento. Estas mediciones representan una aproximación basada en las pruebas de años anteriores. Debe tenerse en cuenta que cada año se fabrican pruebas originales, por lo que la medición no es perfecta.

Si un problema emplea el teorema de Pitágoras, por ejemplo, típicamente tendrá que evaluar también la valuación de fórmulas algebraicas. Por esta razón, algunas preguntas evalúan múltiples temas. Todos los temas son útiles, pero se han marcado con una etiqueta que dice “Importante” aquellos que resultan evaluados con una frecuencia mayor, dentro de cada área. Aún así, la distribución de temas es bastante balanceada (siguiendo la proporción de las barras).