

1. Sean  $x$  y  $y$  números reales distintos tales que  $x + 4 = (y - 2)^2$  y  $y + 4 = (x - 2)^2$ . Determine  $x^2 + y^2$ .

A) -45                      B) 35                      C) 25                      D) 0                      E) 45

2. Las sucesiones  $(x_n)$  y  $(y_n)$  están dadas recursivamente por:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4, & y_1 &= 1, \\ x_{n+1} &= 4x_n + y_n, & n &\in \mathbb{N} \\ y_{n+1} &= x_n + 4y_n, & n &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Calcular  $x_{2018}^2 - y_{2018}^2$ .

A)  $13^{2017}$                       B)  $14^{2019}$                       C)  $15^{2018}$                       D)  $15^{2021}$                       E)  $13^{2018}$

3. Si  $x, y, z, w$  son números reales, calcular  $(x - w)(y - z) + (y - w)(z - x) + (z - w)(x - y)$ .

A)  $-25xyzw$                       B) 0                      C)  $25xy$                       D)  $2wy$                       E) 100

4. Sean  $x$  y  $y$  números reales tales que  $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 33 = 0$ , determine cuál de las siguientes proposiciones es verdadera:

A)  $x \geq y$                       B)  $x = y$                       C)  $x < y$                       D)  $x > y$                       E)  $x \leq y$

5. Resolver la ecuación  $x^2(2 - x)^2 = 1 + 2(1 - x)^2$ .

A) -1, 1, 3                      B) 0,1,2                      C) -3, 0, 1                      D) -1, 1                      E) 0, 1, 2

6. Sean  $a, b$  reales positivos tales que  $\frac{a+2b}{b} = \frac{a+b}{a}$ . ¿Cuál es el valor de  $\frac{(a+b)^2}{ab}$ ?

A) 4                      B)  $3 + \sqrt{3}$                       C)  $2 + \sqrt{5}$                       D)  $2 + 2\sqrt{2}$                       E) 5

7. Un número escrito solamente con 2's ó 3's es llamado *feliz*. Los primeros números felices son 2, 3, 22, 23, .... Determine el 2050-avo número feliz.

A) 3 333 333 333

B) 233 333 332

C) 333 333 333

D) 3 323 333 333

E) 3 333 333 323

8. El promedio de calificaciones de 50 alumnos es 38 puntos. Pablo obtuvo 45 puntos y Brenda 55. Si se eliminan las calificaciones de Pablo y Brenda, calcule el promedio de las puntuaciones restantes.

A) 36                      B) 37.5                      C) 40.7                      D) 29.75                      E) 39

9. Mirando su calendario, María nota que el año 2016 tiene las propiedades particulares: dado  $x = 2016$ , entonces  $x + 1$  es múltiplo de 1,  $x + 2$  es múltiplo de 2,  $x + 3$  es múltiplo de 3,  $x + 4$  es múltiplo de 4. ¿Cuántos enteros positivos menores que 2016 tienen estas propiedades?

- A) 216                      B) 201                      C) 113                      D) 167                      E) 185

10. El producto de dos números naturales es 600 000. ¿Cuál es el mayor Máximo Común Divisor que se puede dar?

- A) 226                      B) 12                      C) 120                      D) 3000                      E) 200

11. Alberto, Bárbara, Carlos y Dalia están participando en un juego. Al inicio cada jugador se le ha asignado aleatoriamente un número: Alberto tiene  $2^{101} + 2^{121} + 2^{180}$ , Bárbara tiene  $2^{100} + 2^{202} + 2^{400}$ , Carlos tiene  $2^{101} + 2^{109}$ , y Dalia tiene  $2^{100} + 2^{108}$ . En cualquier turno, cada jugador divide su número a la mitad, si este es par, o es eliminado del juego si su número es impar. El ganador es aquel que es el último en ser eliminado, pueden haber empates. ¿Quién puede ser el ganador?

- A) Alberto y Carlos  
 B) Bárbara y Dalia  
 C) Alberto  
 D) Alberto y Bárbara  
 E) Dalia

12. ¿Cuál es el factor primo mayor de  $81^3 - 1$ ?

- A) 121                      B) 73                      C) 300                      D) 20                      E) 81

13. A Juanita le gusta mucho jugar con su calculadora. Los dígitos en la calculadora se observan como en la siguiente figura:

1234567890

Al hacer esto, ella encontró números **interesantes invertidos**, los cuales no incluyen el uno y al girar la calculadora 180 grados, continúan siendo un número. Por ejemplo, 25 es un número interesante invertido, pues al girarlo se obtiene el 52. ¿Cuántos números interesantes invertidos de tres cifras existen? *Nota: Secuencias con cero a la izquierda no son considerados números válidos.*

- A) 80                      B) 120                      C) 125                      D) 150                      E) 216

14. Un cubo de  $8 \times 8 \times 8$  consiste de 512 cubitos grises. Tres lados del cubo grande son pintados de blanco, y los otros tres son pintados de rojo. Si cada uno de los ocho vértices del cubo grande tiene al menos un lado blanco y al menos un lado rojo, ¿cuántos cubitos tienen al menos un lado blanco y al menos un lado rojo?

- A) 256                      B) 34                      C) 450                      D) 81                      E) 128

15. Los vértices de un polígono regular de 2018 lados se pintan de azul y blanco de forma alternante. Se trazan todos los lados y vértices de este polígono. ¿Cuántos segmentos unen puntos de distinto color?

- A) 20108      B) 800 102      C) 512 215      D) 1 017 072      E) 2018

16. Laura está comprando ropa en una tienda. Ella no puede decidirse entre 8 blusas, 5 suéteres, y 6 pantalones. Para ahorrar dinero ella solamente puede comprar dos prendas, cada una de diferente tipo (no se puede dos blusas, dos suéteres o dos pantalones). ¿De cuántas formas puede Laura hacer la compra?

- A) 114      B) 128      C) 118      D) 171      E) 342

17. Carlos escribe en la pizarra la lista de todos los número enteros positivos de 1 a 1000. Juana entonces borra todos los número pares de esta lista y los reemplaza por sus mitades. ¿Cuántos número diferentes hay escritos en la pizarra luego de que Juana termine?

- A) 750      B) 1000      C) 100      D) 250      E) 500

18. Dados los enteros  $n$  y  $k$ , con  $1 \leq k \leq n$ , definimos el siguiente polinomio de grado  $n - 1$

$$p(x) = \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{(x+k)}.$$

Por ejemplo, si  $n = 5$  y  $k = 2$ , entonces  $p(x) = (x+1)(x+3)(x+4)(x+5)$ . Suponga que para ciertos  $n$  y  $k$ , el coeficiente de  $x^{n-2}$  en el polinomio  $p(x)$  es igual a 67. ¿Cuál es en este caso, el valor de  $n$ ?

- A) 68      B) 10      C) 69      D) 12      E) 11

19. Sea  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Considere una función  $f: S \rightarrow S$  definida por la siguiente tabla:

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	8	3	5	7	2	9	6	1	4

¿Cuál es el menor entero positivo de  $n$  para el cual la  $n$ -ésima composición de  $f$  cumpla

$$\underbrace{f(f(\cdots(f(x))))}_{n \text{ veces}} = x$$

para todo  $x \in S$ ?

- A) 4      B) 24      C) 5      D) 6      E) 12

20. Una mosca inicia en el origen del plano cartesiano y solamente puede saltar a puntos con coordenadas enteras eligiendo cada vez uno de los tres movimientos:

- de  $(x, y)$  a  $(x + 2, y + 4)$ ;
- de  $(x, y)$  a  $(x, y + 5)$ ;
- de  $(x, y)$  a  $(x - 2, y - 9)$ .

¿Cuántas rutas puede tomar la mosca, usando estos movimientos, si parte del origen y quiere llegar al punto  $(0, 2018)$ ?

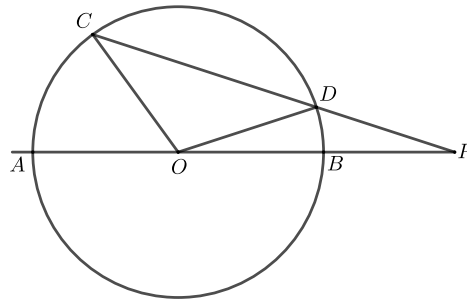
- A) 2      B) 1009      C) 1      D) 2018      E) 0

21. Dos dados rojos y un dado azul son lanzados. ¿Cuál es la probabilidad que la suma de los números mostrados por los dados rojos sea igual al número mostrado por el dado azul?  
 A)  $2/17$       B)  $1/4$       C)  $5/72$       D)  $17/19$       E)  $2017/2019$
22. La Olimpiada de Gramática se realiza de forma anual y la participación es por equipos. Una regla establece que cada equipo debe tener tantas personas como equipos participantes en ese año. Cada año el número de equipos participantes se incrementa exactamente en 1. Sea  $x$  el número total de personas participantes en la competición de 2018 y  $y$  el número de personas participantes en la competición del 2000, ¿cuál de las siguientes afirmaciones acerca de  $x - y$  es necesariamente verdad?  
 A) es divisible por 36  
 B) es divisible por 32  
 C) es impar  
 D) es un cuadrado perfecto  
 E) es un número primo
23. Los habitantes de una isla son divididos en **caballeros**, quienes siempre dicen la verdad; y los **bribones**, quienes siempre mienten. Durante una fiesta de cumpleaños, 450 personas asisten, y cada persona presente afirma «cualquier persona distinta de mí, es un bribón». ¿Cuántos bribones asistieron a la fiesta?  
 A) 225      B) 449      C) 1      D) 125      E) 450
24. Indique cuál de los siguientes conjuntos de números enteros es vacío:  
 A)  $\{x \mid x \text{ es un número primo divisible por } 2\}$   
 B)  $\{x \mid x \text{ es un múltiplo de } 8 \text{ y divisor de } 2\}$   
 C)  $\{x \mid \text{la raíz cuadrada de } x \text{ es un número irracional}\}$   
 D)  $\{x \mid x \text{ es un número primo cuyo único divisor es } 1\}$   
 E) NAC
25. Encontrar números racionales  $a$  y  $b$  tales que:  $\sin 75^\circ \cos 15^\circ = a + \sqrt{b}$ .  
 A)  $a = -1/2, b = 3/16$   
 B)  $a = 2/4, b = 3/16$   
 C)  $a = 1/2, b = 3/16$   
 D)  $a = 3/16, b = 1/2$   
 E)  $a = 2/5, b = 3/81$
26. Sea  $S$  el centro de una circunferencia de radio 1. Los vértices  $A$  y  $B$  de un cuadrado  $ABCD$  están sobre la circunferencia, el lado  $CD$  pasa por el punto  $S$ . Calcular la longitud del lado del cuadrado  $ABCD$ .  
 A)  $\sqrt{2}/5$       B)  $2\sqrt{5}/5$       C)  $2\sqrt{5}/3$       D)  $2\sqrt{2}/5$       E)  $\sqrt{5}/5$

27. Si  $\sin x + \cos x = 1/2$ , calcule  $\sin 2x$ .

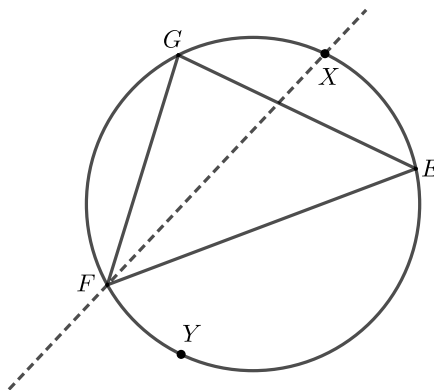
- A)  $-3/4$       B)  $1/2$       C)  $-1/2$       D)  $0.75$       E)  $3/2$

28. Considere una circunferencia con centro en  $O$  y diámetro  $AB$  de longitud 12 cm. Sea  $C$  un punto en esta circunferencia tal que  $\angle AOC = 60^\circ$ . Sea  $P$  un punto en la extensión de  $AB$ , a partir de  $B$ , tal que  $OD = DP$ , donde  $D$  es la intersección de  $PC$  con la circunferencia. Calcular  $\angle APC$ .



- A)  $45^\circ$       B)  $30^\circ$       C)  $17^\circ$       D)  $20^\circ$       E)  $28^\circ$

29. Considere una circunferencia con centro en  $O$  y radio  $r$ . Sean  $E$ ,  $F$  y  $G$  tres puntos distintos sobre esta circunferencia y considere en triángulo  $EFG$ . La bisectriz de  $\angle EFG$  corta a la circunferencia en  $X$ ; sea  $Y$  el punto medio del arco  $GE$  que contiene a  $F$ . Se sabe que  $FX = 12$  y  $FY = 5$ . Calcular la medida del radio  $r$ .



- A)  $20/2$       B)  $1/2$       C)  $0.75$       D)  $13/2$       E)  $15/211$

30. El cuadrilátero convexo  $ABCD$  tiene lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$ , con longitudes 4, 9, 6 y 11 cm, respectivamente. Sean  $E$  y  $F$  los puntos medios de  $AB$  y  $CD$ , y sea  $18 \text{ cm}^2$  el área del cuadrilátero  $BEDF$ . ¿Cuál es el área del cuadrilátero  $ABCD$  en  $\text{cm}^2$ ?

- A) 36      B) 96      C) 26      D) 24      E) 64