# Bibliografía recomendada – Ciclo diversificado

Compilador
Lic. William Gutiérrez
Departamento de Matemáticas
ECFM, USAC

## Descripción del área

El área de **Matemáticas** es de suma importancia dentro de la organización del currículo, pues promueve el desarrollo de la estructura cognitiva necesaria para la comprensión cuantitativa de la realidad que nos rodea. Por ello para comprender nuestro mundo, es necesario abordar el área de Matemáticas con la certeza de que a través de *axiomas, definiciones, teoremas y conjeturas* lograremos transitar hacia el desarrollo mismo de los principios fundamentales de la naturaleza o la tecnología creada por la humanidad a través del tiempo.

El área curricular de Matemáticas es el escenario donde se afianzan y amplían las competencias relacionadas con el análisis y el razonamiento, a partir del planteamiento, formulación, resolución e interpretación de problemas matemáticos provenientes de situaciones de la vida real. Para el logro de las competencias del área, es indispensable la utilización efectiva del lenguaje matemático, incluyendo: amplio vocabulario teórico, comprensión del significado de los términos y el manejo de la simbología específica. Poner en práctica el método científico para hacer conjeturas, crear, investigar, cuestionar, comunicar ideas y resultados, utilizando esquemas, gráficos y tablas e interpretar información en diferentes fuentes para compartir, analizar, tomar decisiones y emitir juicios.

> Cuando se habla de los recursos de un país hay uno, por lo general escaso, que no es costumbre mencionar: *los talentos matemáticos*. Todo niño capta lo esencial de nuestra ciencia, pero solo algunos, naturalmente dotados, llegarán a destacarse o intentar una labor creativa. Sabemos que se manifiestan a muy temprana edad y si no se los educa se malogran luego; es deber de la escuela descubrirlos y guiarlos; es obligación de la sociedad el ofrecerles oportunidad para su desarrollo.
>
> El resto de los ciudadanos, sin esa capacidad o esa vocación especiales, debe, sin embargo, aprender toda la matemática necesaria para entender el mundo que vivimos. Desconocer el lenguaje a que aspiran las ciencias y usan las técnicas es encerrarse en una manera de analfabetismo que un país civilizado no puede tolerar. Aquí el precio de la incuria es la dependencia, la pérdida de la soberanía.
>
> Luis A. Santaló

## Contenido a evaluar

El desarrollo de las matemáticas tienen su fundamentos en conceptos previamente adquiridos: definiciones, teoremas ya demostrados y en última instancia en los axiomas para así avanzar a partir de las reglas lógicas para obtener resultados correctos; por consiguiente cada nivel educativo está diseñado bajo el supuesto que el alumno tiene plenas competencias en los niveles anteriores y con esto tiene la capacidad de afrontar nuevos desafíos matemáticos.

En base a esto, el contenido propuesto a evaluar es acumulativo con respecto al ciclo anterior y parte del presente, de la siguiente forma:

- Primero básico: sexto primaria hasta la mitad de primero.

- Segundo básico: sexto primaria hasta la mitad de segundo.
- Tercero básico: sexto primaria hasta la mitad de tercero.
- Nivel Diversificado: sexto primaria hasta la mitad de cuarto bachillerato y algunos temas de quinto bachillerato.

Esto es para establecer que en las matemáticas no se puede avanzar si no se tienen conocimientos previos, los conceptos se construyen unos sobre otros. Un niño que aprende a factorizar números en primero, no debería olvidar ese concepto cuando este cursando tercero básico o diversificado, o como se utiliza el teorema de Pitágoras.

A continuación se da la lista de libros y material de apoyo sugeridos para alumnos, profesores y padres de familia, con lo cual pueden iniciar su entrenamiento en la resolución de problemas matemáticos.

## Lista de libros


[1] Ayres, F. *Cálculo.* Serie Schaum.

[2] Baldor, Aurelio (1972). *Álgebra elemental.* Cultural Centroamericana, Guatemala.

[3] Baldor, Aurelio (1974). *Aritmética – Teórico práctica.* Cultural Centroamericana, Guatemala.

[4] Baldor, Aurelio (2004). *Geometría plana y del espacio – con una introducción a la trigonometría.* Publicaciones Cultural, México.

[5] Bulajich y Gómez (2002). *Geometría.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, México.

[6] Bulajich y Gómez (2003). *Geometría – Ejercicios y problemas.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, México.

[7] Bulajich, Gómez y Valdez (2007). *Desigualdades.* Tercera edición. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, México.

[8] Coxeter, H.S.M. (1971). *Fundamentos de geometría.* Editorial Limusa-Wiley, México.

[9] Díaz-Gómez, Mario (2004). *Problemas de matemáticas para los entrenamientos de la educación preuniversitaria I.* Editorial Pueblo y Educación, Cuba.

[10] Díaz-Gómez, Mario (2007). *Problemas de matemáticas para los entrenamientos de la educación preuniversitaria II.* Editorial Pueblo y Educación, Cuba.

[11] Gobran, Alfonse (1990). *Álgebra elemental.* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

[12] Grimaldi, Ralph P. (1997). *Matemáticas discretas y combinatoria.* Tercera edición. Addison Wesley, México.

[13] Leithold, L. (1973). *El cálculo con geometría analítica.* Segunda edición. Harla, México.

[14] Lipschutz, S. *Álgebra lineal.* Serie Schaum.

[15] Lipschutz, S. *Teoría de conjuntos y temas afines.* Serie Schaum.

[16] Lipschutz, S. *Matemáticas discretas.* Serie Schaum.

[17] Perelman, Y. (1968). *Matemáticas recreativas.* Ediciones Martínez Roca, España.

[18] Pérez-Segui, María (2005). *Combinatoria.* Tercera edición. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, México.

[19] Pérez-Segui, María (2008). *Matemáticas preolímpicas.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, México.

[20] Pérez-Segui, María (2009). *Teoría de números.* Segunda edición. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, México.

[21] Purcell y Varberg (1993). *Cálculo con geometría analítica.* Segunda edición. Prentice Hall, México.

[22] Rozán, José E. (1945). *Aritmética y nociones de geometría.* Segunda edición. Editorial Progreso, México.

[23] Spiegel, M. *Álgebra superior.* Serie Schaum.

[24] Swokowski, Earl (1988). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* Segunda edición. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

[25] V.A. (2009). *Compendio de problemas de olimpiadas de matemática.* Año 1. SENACYT-FIUSAC, Guatemala.

[26] V.A. (2010). *Boletín de las Olimpiadas de Matemática en Guatemala.* Año 2. SENACYT-FIUSAC, Guatemala.

[27] V.A. (2011). *Boletín de las Olimpiadas de Matemática en Guatemala.* Año 3. SENACYT-FIUSAC, Guatemala.

Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

# REFORMA DE CONTENIDOS ONC
# MATEMÁTICA, DIVERSIFICADO

Propuesta: José Carlos Bonilla
Colaboración: Mario Roberto Gómez Flores
Versión: 1.0

**Contenidos declarativos, procedimentales y algunos comentarios explicativos.*

## 1 — TEORÍA DE CONJUNTOS

**1.1 Fundamentos.** Conjunto vacío, conjunto universo, cardinalidad, relaciones de pertenencia ($\in$) y contención ($\subseteq$). Conjuntos numéricos: Conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), enteros ($\mathbb{Z}$), racionales ($\mathbb{Q}$) y los números reales $\mathbb{R}$.

**1.2 Operaciones con conjuntos.** Representación gráfica, enumerativa y descriptiva de la unión o intersección de dos o más conjuntos. Representación gráfica, enumerativa y descriptiva de la diferencia de dos conjuntos, la diferencia simétrica de dos o tres conjuntos, y del complemento de un conjunto dentro de un universo dado (notación: $A^C$ es el complemento del conjunto $A$). Pares ordenados, ternas ordenadas, $n-$adas ordenadas, construcción gráfica y enumerativa del producto cartesiano de dos conjuntos dados, construcción enumerativa del producto cartesiano de tres o más conjuntos. Cardinalidad de un conjunto. Cardinalidad de productos cartesianos de dos o más conjuntos. Principio de inclusión y exclusión para dos o más conjuntos. Operaciones con conjuntos infinitos[1]. Leyes de DeMorgan en conjuntos.

**1.3 Subconjuntos.** Capacidad de enumerar todos los subconjuntos de un conjunto dado que posea una cantidad reducida de elementos. Subconjuntos de $k$ elementos dentro de un conjunto de $n$ elementos (con $k \leq n$). Contención propia ($\subset$) e impropia ($\subseteq$). Escritura de subconjuntos infinitos de los enteros o naturales en forma descriptiva (por ejemplo, los múltiplos de tres se pueden codificar en forma descriptiva como: $\{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$).

## 2 — LÓGICA Y RAZONAMIENTO

**2.1 Conceptos básicos de la lógica proposicional.** Proposición y valor de verdad. Diferenciación entre proposición y proposición abierta[2]. Capacidad de elaborar argumentos y demostraciones

[1] Por ejemplo: En el universo de los enteros, ¿Cuál es la intersección del conjunto de los números pares con el conjunto de los múltiplos de tres?

[2] Una proposición abierta es aquella que tiene variables indeterminadas y no cuantificadas, propiamente hablando no es una proposición pues no tiene valor de verdad, a menos que se determine el valor de sus variables. Por ejemplo: *"El número $x$ es par"*. Puede concebirse como un conjunto de proposiciones.

matemáticas. [3]

**2.2 Acertijos lógicos.** Problemas que involucren el valor de verdad de oraciones, la utilización de balanzas o contenedores para realizar cálculos o comparaciones de forma ingeniosa, búsqueda de errores en razonamientos, problemas que versen sobre mensajes codificados, búsqueda de estrategias óptimas, etc.[4]

**2.3 Conectivos lógicos y tablas de verdad.** Construcción de tablas de verdad para los conectivos lógicos básicos (conjunción $\wedge$, disyunción $\vee$, negación $\neg$, condicional $\to$ y bicondicional $\leftrightarrow$) para dos o más proposiciones simples. Proposición compuesta. Valor de verdad de una proposición compuesta. Valor de verdad de una proposición simple dados los valores de una o varias proposiciones compuestas en las que está incluida. Equivalencia lógica.

**2.4 Leyes de la lógica.** Leyes operativas de los conectivos lógicos (asociatividad, conmutatividad, idempotencia, etc.). Leyes de De Morgan. Uso de estas leyes para verificar equivalencia lógica de proposiciones compuestas sin usar tablas de verdad.

**2.5 Patrones.** Identificación y aplicación de patrones establecidos a figuras geométricas, tablas de datos, números u otros objetos para la determinación de un objeto final, después de un número finito de aplicaciones de la regla o patrón[5].

# 3 — ARITMÉTICA

**3.1 Axiomas.** Comprensión de las leyes o axiomas algebraicos de los números, con respecto a las operaciones de suma y multiplicación (conmutatividad, asociatividad, distributividad, existencia del elemento neutro y la unidad, y existencia de elementos simétricos e inversos). Capacidad de verificar si las leyes se cumplen o no para una nueva operación cuya definición es indicada en un problema.

**3.2 Divisibilidad.** Definición de divisibilidad. Diferenciación entre la relación de divisibilidad ($4 \mid 12$ es verdadero) y la operación de división ($12 \div 4 = 3$). Algoritmo de la división (dividendo

[3]En particular, si al alumno se le solicita un argumento, se espera una explicación clara y convincente, aunque no debe cubrir absolutamente todos los detalles ni ser enteramente formal. Una demostración en matemáticas, por el contrario, debe ser clara, convincente, formal y sin agujeros lógicos.

[4]Esta sección puede combinarse con otros contenidos de ésta y otras áreas, por lo que es evaluada de manera frecuente.

[5]Algunos problemas que consisten en la detección de patrones no son problemas matemáticos válidos, pues pueden depender del punto de vista y tener infinitas respuestas posibles. Tales problemas no serán evaluados. Ejemplo de un problema inválido: "Hallar el siguiente número en la sucesión: 2, 4, 6, ...". El problema es inválido pues tiene infinitas posibles respuestas, el patrón podría continuar así: "2, 4, 6, 12, 14, 16, 22, 24, 26, 32, 34, 36, 42, 44, 46, ... ", o así: "2, 4, 6, 6, 8, 10, 10, 12, 14, 14, 16, 18, 18, ...". Note cuán diferente parece el último patrón si se lee de tres en tres (el patrón parece completo), o si se pone atención únicamente a los números que se repiten y los que no se repiten, que ocurren de manera alternada (el patrón parece incompleto pues el 2 "debería" repetirse). Incluso podría no haber un patrón, tal y como se entiende la palabra. Sólo las definiciones pueden depender del punto de vista, no así los problemas en matemática.

= divisor por cociente más residuo). Propiedades de la divisibilidad en los naturales (reflexividad, antisimetría y transitividad). Definiciones de divisor, múltiplo, divisor común, múltiplo común, máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (MCM) para dos o más números. Argumentos vía paridad (por ejemplo: se puede utilizar en un argumento el hecho de que la suma de varios números puede ser impar solamente si entre los sumandos hay una cantidad impar de impares). Criterios de divisibilidad entre números que sean potencias de dos (2,4,8,16,...), potencias de 5, potencias de 10, y criterios para 3, 7, 9 y 11. Algoritmo de Euclides para la determinación del MCD de dos números[6].

**3.3 Primos.** Número primo y número compuesto. Primos relativos. Criterios para verificar si un número dado es primo (verificar si es múltiplo de algún número mayor que 1 y menor o igual a su raíz cuadrada). Construcción de la criba de Eratóstenes. Definición de primos gemelos. Definición de números perfectos.

**3.4 Teorema fundamental de la Aritmética.** Comprensión del enunciado del teorema. Factorización en primos un número natural dado. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números vía sus factores primos. Número de divisores positivos de un número entero, suma de los divisores positivos de un número (fórmulas).

**3.5 Operatoria.** Suma, resta, multiplicación y división de números enteros, racionales, irracionales, reales y complejos. Operaciones con decimales y fracciones. Fracciones equivalentes y simplificación de las mismas. Conversión de números racionales entre las formas siguientes: número mixto, fracción (propia o impropia), número decimal y porcentaje. Potenciación y radicación de enteros, racionales y reales. Leyes de los exponentes y de las raices. Leyes de los signos para la multiplicación o división de números. Jerarquía de las operaciones incluyendo signos de agrupación.

**3.6 Orden.** Relaciones de orden ($<, >, \leq$ y $\geq$) y sus propiedades (reflexividad, antisimetría y transitividad). Recta de los números reales. Capacidad de ordenar de menor a mayor o de mayor a menor un conjunto dado de números reales, posiblemente expresados mediante combinaciones de operaciones aritméticas. La desigualdad cuadrática como herramienta para elaborar argumentos (la desigualdad cuadrática dice que todo número real elevado al cuadrado da un resultado no negativo).

**3.7 Sucesiones y series.** Sucesiones aritméticas, sucesiones geométricas, series aritméticas y series geométricas. Fórmula para calcular series aritméticas y series geométricas, en particular la fórmula de Gauss. Sucesiones definidas recursivamente o con forma cerrada. Factorial y su jerarquía en las operaciones. Ecuaciones de recurrencia: concepto, definición de términos iniciales, definición de solución y verificación de que una fórmula cerrada dada sea solución de una ecuación de recurrencia.[7] Ecuaciones de recurrencia para series aritméticas, series geométricas y factoriales.

[6] En algunos textos este método es conocido como el "método de las divisiones sucesivas".

[7] NO se evaluará métodos específicos para la resolución de ecuaciones de recurrencia, como el del polinomio característico; sin embargo, se puede esperar que el alumno conjeture la solución de una ecuación simple, empleando su ingenio, y verifique que cumple las condiciones para ser solución.

**3.8 Ecuaciones en enteros.**[8] Ecuaciones de dos variables con soluciones enteras (por ejemplo, encontrar los pares de enteros $(x, y)$ tales que sean solución de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ o aquellas que pueden ser resueltas con el teorema fundamental de la aritmética).

**3.9 El lema de Euclides y el Pequeño teorema de Fermat.** Conocimiento del enunciado y aplicación del pequeño teorema de Fermat y el lema de Euclides. *El pequeño teorema de Fermat*[9] *dice: si a es un número entero cualquiera, y p es un primo, entonces los números $a^p$ y a dejan el mismo residuo al ser divididos entre p.*[10]

# 4 — GEOMETRÍA EUCLIDIANA

**4.1 Razonamiento espacial.** Figuras sólidas construidas con figuras más simples. Estrategias para contar aristas, caras y vértices de figuras sólidas construidas a partir de cubos y otras figuras más básicas. Rotación, traslación y reflexión de figuras sólidas o planas, posiblemente iteradas o combinadas.

**4.2 Conceptos básicos.** Segmentos de recta, definición de circunferencia, arcos de circunferencia, rectas tangentes a circunferencias, rectas secantes a circunferencias, diámetro y radio de circunferencias. Proporcionalidad como factor de conversión y conversiones entre medidas lineales, cuadráticas y cúbicas (por ejemplo, de metros cúbicos a centímetros cúbicos).

**4.3 Polígonos.** Clasificación y nomenclatura de las figuras según el número de lados y otras propiedades (triángulos, cuadriláteros, paralelogramos, rombos, cuadrados, rectángulos, romboides[11], trapecios, trapezoides, pentágonos, hexágonos, etc.). Clasificación de triángulos según sus ángulos y según sus lados. Perímetro y área de figuras geométricas (cuadrado, rectángulo, círculo, triángulo, etc.), fórmula de Herón para el área del triángulo. Vértices, lados y diagonales de polígonos.

**4.4 Figuras sólidas o tridimensionales.** Volumen y área superficial de algunas figuras geométricas sólidas (esfera, cubo, cilindro, pirámide, prisma, cono y ortoedro[12]); vértices, aristas y caras de

[8] A este tipo de ecuaciones también se les llama **ecuaciones diofantinas**.

[9] No es necesario conocer la definición de la relación de congruencia de números enteros, pero puede estudiarse para tener un mayor dominio de las técnicas de la Aritmética o Teoría de Números. El enunciado dado arriba para el pequeño teorema de Fermat es libre de la notación de congruencias, pero si se investiga el tema, probablemente se encuentre mucho material que utilice esa notación.

[10] A manera de ejemplo, considere el siguiente problema: demuestre que los números que son cubos perfectos sólo pueden dejar residuo 0, 1 ó 6 al dividirlos por 7. Demostración: por el pequeño teorema de Fermat, $n^7 - n$ es divisible por 7 para cualquier número entero $n$. Esto es, 7 es divisor de $n(n^3 - 1)(n^3 + 1)$. Si $n$ es múltiplo de 7, $n^3$ deja residuo cero al dividirlo por 7. En cualquier otro caso, por el lema de Euclides, 7 debe dividir a alguno de los dos factores $n^3 - 1, n^3 + 1$. Esto implica que el cubo perfecto deja residuo 1 ó 6 respectivamente.

[11] También llamados deltoides. Entre los matemáticos de Guatemala es común la nomenclatura de Julio Rey Pastor, en la que los romboides NO son un caso particular de los paralelogramos, sino que corresponden a la figura geométrica que intuitivamente se identifica con los barriletes (deltoides). En muchos libros europeos y norteamericanos, se le llama romboide al paralelogramo que no es rombo, en nuestro caso a esta figura se le llamará simplemente "paralelogramo general".

[12] También conocido como prisma rectangular recto, o paralelepípedo recto.

figuras sólidas en las que tales conceptos apliquen[13]. Característica de Euler.

**4.5 Ángulos y circunferencias.** Medidas angulares en grados y radianes. Conversión entre medidas. Teorema de la suma de los ángulos internos en un triángulo (180 grados), sumas de los ángulos internos en cuadriláteros (regulares o irregulares). Ángulos entre paralelas (correspondientes, opuestos por el vértice, y alternos internos y externos). Sectores circulares (perímetro y área). Definición de polígono inscrito y polígono circunscrito a una circunferencia, en particular, definición de cuadrilátero cíclico.

**4.6 Semejanza y congruencia.** Triángulos semejantes y congruentes. Reconocimiento de figuras geométricas (triángulos y otras) rotadas, trasladadas o dilatadas. Criterios de congruencia de triángulos: lado-lado-lado, lado-ángulo-lado y ángulo-lado-ángulo. Criterios de semejanza de triángulos: lado-lado-lado, lado-ángulo-lado y ángulo-ángulo.

**4.7 Teoremas fundamentales.** Teorema de los ángulos en la base de un triángulo isósceles (Pons asinorum). Teorema de Pitágoras. El teorema del ángulo central y el del ángulo inscrito. Teorema de Thales. Teorema de las diagonales de un paralelogramo y el de las diagonales de un romboide. Teorema de los ángulos opuestos en un cuadrilátero cíclico.

**4.8 Propiedades del triángulo.** Rectas importantes en el triángulo: bisectrices angulares, bisectores perpendiculares o mediatrices, medianas, alturas. Puntos importantes en el triángulo: centroide o gravicentro, circuncentro, ortocentro, incentro. Construcción del incírculo y del circuncírculo. Teorema de la bisectriz. Aplicación de la Ley de Senos y la Ley de Cosenos.

**4.9 Geometría analítica básica.** Concepto del plano cartesiano y las coordenadas de un punto. Ecuación de la recta: forma punto-pendiente, forma estándar y forma general. Interceptos en $x$ y en $y$. Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales y dos variables por el método gráfico. Curvas y ecuaciones: interpretación de los puntos de intersección como soluciones de un sistema de ecuaciones (no necesariamente lineales). Trazo aproximado de curvas mediante tablas de puntos. Localización del vértice de una parábola mediante el procedimiento algebraico (conversión de la ecuación de la parábola a la forma estándar). La ecuación del círculo: forma general y forma estándar de círculos con centro en el origen o fuera de él.

**4.10 Cónicas.** Definiciones de las distintas curvas cónicas: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. Puntos, segmentos y rectas asociados: vértices, focos, lado recto, eje mayor, eje menor, semi-eje mayor, semi-eje menor, centro, directriz, ejes de simetría, distancia focal. Ecuación general de las cónicas, ecuación estándar de cada tipo de cónica y conversión entre ellas (completación de cuadrados o expansión algebraica).

[13] Usualmente se estudian en referencia a los llamados poliedros (la generalización de polígono para tres dimensiones).

# 5 — ÁLGEBRA

**5.1 Axiomas.** Propiedades de las operaciones suma y producto en el contexto algebraico (asociatividad, conmutatividas, cerradura, distributividad, elemento neutro, elemento simétrico e inverso).

**5.2 Conceptos básicos.** Definición de polinomio. Diferenciación entre los conceptos de variable y constante. Diferenciación entre los conceptos de dato (constante conocida) e incógnita (constante desconocida). Definición del grado de un polinomio, clasificación de polinomios según el grado (lineal, cuadrático, cúbico, cuártico, quíntico, etc.).

**5.3 Operatoria.** Operaciones aritméticas aditivas (suma y resta) aplicadas a polinomios. Multiplicación y división larga y sintética de polinomios. Expansión de productos y simplificación de expresiones algebraicas, reducción de términos semejantes en polinomios. Operaciones aritméticas básicas aplicadas a expresiones algebraicas más generales (fracciones, radicales, exponenciales, etc.).

**5.4 Productos notables.** Binomio al cuadrado, producto de binomios conjugados, binomio al cubo, producto de binomios con un término común, cuadrado de un polinomio. Expansión de un binomio a cualquier potencia natural mediante el triángulo de Pascal.

**5.5 Factorización.** Casos de factorización en una o dos variables: factor común, trinomio cuadrado perfecto, tetranomio cubo perfecto, diferencia de cuadrados, suma de potencias impares, diferencia de potencias pares o impares, factorización por agrupación, factorización de trinomios cuadráticos más generales (por cualquier método), factorización de Sophie-Germain,[14] factorización por la fórmula cuadrática, factorización por división larga o sintética. Definición de polinomio cuadrático irreducible. Casos de factorización para más de dos variables: además de los casos anteriores, la factorización de Gauss.[15]

**5.6 Divisibilidad de polinomios.** Definición de la divisibilidad de polinomios, propiedades de la divisibilidad (notar que la antisimetría es diferente de la de números naturales). Definiciones de múltiplo, divisor, múltiplo común, divisor común, mínimo común múltiplo y máximo común divisor. Algoritmo de Euclides para la determinación del MCD de dos polinomios.[16]

**5.7 Teoremas básicos.** Definición de raíz de un polinomio, concepto de número complejo como raíz de un polinomio cuadrático irreducible. Enunciado y aplicaciones del teorema fundamental del Álgebra, Teorema del Factor y Teorema del Residuo (para valores reales o complejos). El teorema de las raíces conjugadas de un polinomio con coeficientes reales.

**5.8 Ecuaciones, desigualdades e inecuaciones.** Diferenciación entre ecuaciones e identidades algebraicas. Resolución de ecuaciones lineales mediante despeje algebraico. Resolución de ecuaciones cuadráticas por completación de cuadrados, casos de factorización y fórmula cuadrática. Dis-

[14] Es el nombre más común para el caso de factorización de expresiones del tipo $x^4 + 4y^4$

[15] Se trata de este caso: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.

[16] En el Álgebra de Baldor y otros libros es llamado "método de divisiones sucesivas". Es una generalización del método descrito en el apartado de aritmética al contexto de polinomios.

criminante de un polinomio cuadrático y su relación con la naturaleza de las raíces. Concepto de inecuación ($\neq$) y desigualdad ($<, >, \leq$ y $\geq$). Inecuaciones o desigualdades lineales en una variable, representación gráfica (recta numérica) de la solución y por intervalos[17]. Resolución de una ecuación o inecuación polinomial en una variable, o con funciones racionales. Resolución de ecuaciones, inecuaciones y desigualdades con un valor absoluto. Despejes que involucren la aplicación de operaciones inversas, funciones inversas, fórmula cuadrática, etc. para ecuaciones de varias variables. Resolución de ciertas ecuaciones cúbicas y de mayor grado empleando: casos de factorización, regla de los signos de Descartes, enumeración de posibles raíces racionales y división sintética. Resolución de algunas inecuaciones cúbicas y de mayor grado en una variable empleando los mismos métodos. Resolución de desigualdades que involucren expresiones algebraicas racionales en una variable. Resolución de ecuaciones, inecuaciones y desigualdades con más de un valor absoluto de expresiones algebraicas, en una variable.

**5.9 Números complejos.** Conceptos de número complejo, número imaginario puro, parte real, parte imaginaria, conjugado de un complejo, módulo y argumento de un número complejo (magnitud y dirección, si se interpreta al complejo como un vector). Las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división de números complejos. Cálculo de potencias de números complejos, en particular, de la unidad imaginaria. Factorización de la suma de cuadrados en los complejos: $x^2 + y^2 = (x + \mathrm{i}\,y)(x - \mathrm{i}\,y)$.

**5.10 Desigualdades de varias variables.** Llevar a cabo argumentos que dependan de una o varias aplicaciones de la desigualdad cuadrática[18] (por ejemplo, se puede demostrar que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ multiplicando ambos miembros por 2, pasando a restar los términos de la derecha y así construyendo tres cuadrados perfectos: $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$, y ésta última es cierta por la suma de tres desigualdades cuadráticas). La desigualdad del reacomodo. Definición de media aritmética. Definición de media geométrica. La desigualdad de la media aritmética y la media geométrica (AM-GM). La desigualdad del triángulo.

**5.11 Ecuaciones e identidades trigonométricas.** Resolución de ecuaciones trigonométricas lineales, cuadráticas, cúbicas o de mayor grado en una función trigonométrica. Resolución de ecuaciones que involucren expresiones racionales en las funciones trigonométricas. Uso de identidades trigonométricas para reducir una ecuación que dependa de varias funciones trigonométricas a una ecuación en una sola función trigonométrica. Demostración de identidades trigonométricas[19]. Conocimiento de las identidades de suma y resta de ángulos, doble y triple ángulo, medio ángulo, y

[17] En los exámenes se aplica el convenio de notación siguiente: un intervalo abierto se representa con paréntesis, en tanto que un intervalo cerrado con corchetes. Así por ejemplo, el intervalo abierto de 3 a 5 es (3,5), mientras que el intervalo cerrado sería [3,5].

[18] La desigualdad cuadrática es la que dice que toda expresión algebraica elevada al cuadrado es mayor o igual a cero.

[19] Para demostrar una identidad trigonométrica del tipo $A = B$, donde $A, B$ son expresiones algebraicas que dependen de las funciones trigonométricas, se tomarán como válidas las siguientes opciones: convertir la expresión $A$ en la expresión $B$, mediante el uso de identidades y simplificación algebraica; convertir por separado ambas expresiones $A, B$, en una tercera expresión $C$; o bien, manipular algebraicamente la ecuación $A = B$ hasta reducirla a una identidad conocida u obvia, siempre y cuando los pasos empleados sean reversibles (multiplicar por cero ambos miembros es un paso irreversible, pues no se puede dividir entre cero). En algunas instituciones educativas se enseña solamente el primer método, descartando los otros como erróneos. Ese descarte tradicional no tiene fundamento lógico-matemático.

las identidades pitagóricas.

# 6 — TEORÍA DE FUNCIONES

**6.1 Conceptos básicos.** Definición de relación y de función. Distintas interpretaciones de una función: fórmula algebraica, representación gráfica, tabla de datos. Suma de funciones, multiplicación de funciones, composición de funciones. Definición de función inversa. Cálculo de funciones inversas. Interpretación gráfica de la función inversa como una reflexión. Definición y obtención de dominios y rangos de funciones. Definición de continuidad y puntos de discontinuidad.

**6.2 Funciones algebraicas.** Funciones lineales, cuadráticas y cúbicas. Restricción del dominio de una función cuadrática para la obtención de una función inversa. Obtención de máximos y mínimos para algunas funciones básicas: funciones cuadráticas, funciones radicales, semi-circunferencias (siempre y cuando no se requiera cálculo diferencial). Transformaciones de funciones: traslaciones, compresiones y estiramientos. Funciones racionales: interceptos, asíntotas horizontales, oblicuas y verticales, interceptos de la función con la asíntota horizontal u oblicua, bosquejo de la gráfica. Obtención de las coordenadas del punto que corresponde a una singularidad removible de una función racional no simplificada. Representación gráfica de una singularidad removible.

**6.3 Funciones trigonométricas.** Graficación de funciones trigonométricas. Definición de funciones trigonométricas inversas. Gráficas de funciones trigonométricas inversas. Funciones sinusoidales: amplitud, período, ángulo de fase, frecuencia angular, traslación vertical. Obtención de una gráfica a partir de los datos anteriores, y obtención de los datos a partir de la gráfica.

**6.4 Funciones exponenciales y logarítmicas.** Definición de logaritmo. Leyes de los logaritmos: suma de logaritmos, multiplicación de un logaritmo por una constante, cambio de base. Graficación de funciones exponenciales y logarítmicas, con sus asíntotas. Obtención de la fórmula de una función exponencial o logarítmica a partir de información en forma de tabla o de una gráfica precisa.

**6.5 Funciones a trozos.** Concepto. Gráfica de una función a trozos dada, y obtención de una fórmula por trozos para una gráfica dada. Capacidad de determinar si los puntos limítrofes de los trozos son puntos de continuidad o discontinuidad.

# 7 — COMBINATORIA

**7.1 Principios.** Definición y aplicaciones del principio de la suma y del principio de la multiplicación (como técnicas de conteo), el principio de inclusión y exclusión para pocos conjuntos, y el principio de las casillas o principio de Dirichlet[20].

[20]Este principio dice: Si se desea clasificar objetos en casillas, con la posibilidad de colocar uno, ninguno, o varios objetos en cada casilla, y si se cuenta con más objetos que casillas, entonces forzosamente habrá una casilla con

**7.2 Conteo.** Factorial y su conexión con el conteo. Permutaciones (con repetición y sin repetición). Combinación (con y sin repetición). Fórmulas básicas de conteo: ${}_nP_k$ y ${}_nC_k$. Saber que los números combinatorios ${}_nC_k$ son equivalentes a los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ que aparecen en el triángulo de Pascal. Conocer y saber aplicar la identidad de Pascal, que permite construir el triángulo de Pascal. Problemas de conteo que involucran la división por casos[21].

**7.3 Grafos.** Grafo, vértice y arista. Interpretación de poliedros como grafos. Problemas de conteo en grafos (por ejemplo: calcular cuántas estrechadas de mano ocurren entre diez personas, si se sabe que cada persona estrechó la mano una vez con cada una de las otras nueve).

## 8 — ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

**8.1 Estadística.** Medidas de tendencia central (media, mediana, moda). Tablas de datos. Medidas de dispersión (varianza, desviación media y estándar). Tablas de frecuencias. Amplitud, Rango, Intervalo, Frecuencia absoluta, Frecuencia acumulada. Problemas que involucran promedios.

**8.2 Probabilidad.** Concepto básico de probabilidad para un número finito de eventos (tiros de dados, selección de cartas en una baraja, tiros de monedas, etc.). Probabilidad conjunta de eventos independientes. Concepto de eventos mutuamente excluyentes y, entre ellos, los eventos complementarios. Entender la relación entre los principios de la suma, de la multiplicación, y de inclusión y exclusión con la probabilidad.

## 9 — ÁLGEBRA LINEAL

**9.1 Vectores.** Conceptos de vector, escalar, magnitud, dirección y componentes horizontal y vertical. Representación cartesiana, polar y gráfica de un vector. Cálculo de la suma de vectores (en forma cartesiana y gráfica), y la multiplicación de un vector por un escalar (en forma cartesiana, polar y gráfica). Conversión entre la forma cartesiana y la forma polar de vectores (en ambas direcciones), esto es, obtención de las componentes horizontal y vertical de un vector dado en forma polar, y obtención de la magnitud y dirección de un vector dado en forma cartesiana.

**9.2 Producto escalar.** Diferenciación entre el producto de un vector por un escalar, y el producto escalar de dos vectores. Cálculo del producto escalar en términos de las coordenadas. Cálculo del producto escalar en forma polar (la fórmula del coseno). Relación entre el producto escalar y la perpendicularidad de vectores.

---

más de un objeto.

[21] Por ejemplo: ¿Cuántos números de tres dígitos son tales que su primer y último dígito son iguales? En este caso, se observa que repitiendo el 1 se obtienen números del tipo $1\square 1$, de los cuales hay 10 diferentes, y lo mismo sucede con las otras ocho posibilidades para el dígito repetido, esto es, $9 \times 10 = 90$ números en total.

**9.3 Álgebra matricial.** Concepto de matrices. Operatoria: suma de matrices, multiplicación de una matriz por un escalar, multiplicación de una matriz por un vector, multiplicación de dos matrices, cálculo del determinante de una matriz cuadrada de $2 \times 2$ y de $3 \times 3$, por el método de Kramer. Relación entre las matrices y los sistemas de ecuaciones lineales de varias variables. Relación entre el número de soluciones de un sistema de ecuaciones y el determinante de la matriz asociada.

## 10 — CÁLCULO

**10.1 Límites.** Concepto de límite de una sucesión infinita. Concepto de límite de una función. Diferenciar entre estos dos tipos de límites. Definición de serie. Interpretación de la expansión decimal infinita de un número racional o irracional como una serie de potencias de base 10. Utilización de la fórmula de la serie geométrica infinita para calcular algunas series elementales (Por ejemplo, se le puede solicitar que calcule la serie: $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\cdots$, bajo el supuesto de que cada término se obtiene del anterior duplicando el denominador). Series telescópicas.