Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

REFORMA DE CONTENIDOS ONC
MATEMÁTICA, TERCERO BÁSICO

Propuesta: José Carlos Bonilla
Colaboración: Mario Roberto Gómez Flores
Versión: 1.0

**Contenidos declarativos, procedimentales y algunos comentarios explicativos.*

1 — TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1 Fundamentos. Conjunto vacío, conjunto universo, cardinalidad, relaciones de pertenencia ($\in$) y contención ($\subseteq$). Conjuntos numéricos: conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), enteros ($\mathbb{Z}$), racionales ($\mathbb{Q}$) y los números reales ($\mathbb{R}$).

1.2 Operaciones con conjuntos. Representación gráfica, enumerativa y descriptiva de la unión o intersección de dos o más conjuntos. Representación gráfica, enumerativa y descriptiva de la diferencia o diferencia simétrica de dos conjuntos, y del complemento de un conjunto dentro de un universo dado (notación: A^C es el complemento del conjunto A). Pares ordenados, ternas ordenadas, construcción gráfica y enumerativa del producto cartesiano de dos conjuntos dados, construcción enumerativa del producto cartesiano de tres conjuntos. Cardinalidad de un conjunto. Cardinalidad de productos cartesianos de dos o tres conjuntos. Principio de inclusión y exclusión para dos, tres o cuatro conjuntos. Operaciones con conjuntos infinitos[1]. Leyes de DeMorgan en conjuntos.

1.3 Subconjuntos. Capacidad de enumerar todos los subconjuntos de un conjunto dado que posea una cantidad reducida de elementos. Subconjuntos de k elementos dentro de un conjunto de n elementos (con $k \leq n$). Contención propia ($\subset$) e impropia ($\subseteq$). Escritura de subconjuntos infinitos de los enteros o naturales en forma descriptiva (por ejemplo, los múltiplos de tres se pueden codificar en forma descriptiva como: $\{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$).

2 — LÓGICA Y RAZONAMIENTO

2.1 Conceptos básicos de la lógica proposicional. Proposición y valor de verdad. Diferenciación entre proposición y proposición abierta[2]. Capacidad de elaborar argumentos y demostraciones

[1] Por ejemplo: En el universo de los enteros, ¿Cuál es la intersección del conjunto de los números pares con el conjunto de los múltiplos de tres?

[2] Una proposición abierta es aquella que tiene variables indeterminadas y no cuantificadas, propiamente hablando no es una proposición pues no tiene valor de verdad, a menos que se determine el valor de sus variables. Por ejemplo: *"El número x es par"*. Puede concebirse como un conjunto de proposiciones.

matemáticas. [3]

2.2 Acertijos lógicos. Problemas que involucren el valor de verdad de oraciones, la utilización de balanzas o contenedores para realizar cálculos o comparaciones de forma ingeniosa, búsqueda de errores en razonamientos, problemas que versen sobre mensajes codificados, búsqueda de estrategias óptimas, etc.[4]

2.3 Conectivos lógicos y tablas de verdad. Construcción de tablas de verdad para los conectivos lógicos básicos (conjunción $\wedge$, disyunción $\vee$, negación $\neg$, condicional $\rightarrow$ y bicondicional $\leftrightarrow$) para dos o más proposiciones simples. Proposición compuesta. Valor de verdad de una proposición compuesta. Valor de verdad de una proposición simple dados los valores de una o varias proposiciones compuestas en las que está incluida. Equivalencia lógica.

2.4 Leyes de la lógica. Leyes operativas de los conectivos lógicos (asociatividad, conmutatividad, idempotencia, etc.). Leyes de De Morgan. Uso de estas leyes para verificar equivalencia lógica de proposiciones compuestas sin usar tablas de verdad.

2.5 Patrones. Identificación y aplicación de patrones establecidos a figuras geométricas, tablas de datos, números u otros objetos para la determinación de un objeto final, después de un número finito de aplicaciones de la regla o patrón[5].

3 — ARITMÉTICA

3.1 Axiomas. Comprensión de las leyes o axiomas algebraicos de los números, con respecto a las operaciones de suma y multiplicación (conmutatividad, asociatividad, distributividad, existencia del elemento neutro y la unidad, y existencia de elementos simétricos e inversos). Capacidad de verificar si las leyes se cumplen o no para una nueva operación cuya definición es indicada en un problema.

3.2 Divisibilidad. Definición de divisibilidad. Diferenciación entre la relación de divisibilidad ($4 \mid 12$ es verdadero) y la operación de división ($12 \div 4 = 3$). Algoritmo de la división (dividendo

[3] En particular, si al alumno se le solicita un argumento, se espera una explicación clara y convincente, aunque no debe cubrir absolutamente todos los detalles ni ser enteramente formal. Una demostración en matemáticas, por el contrario, debe ser clara, convincente, formal y sin agujeros lógicos.

[4] Esta sección puede combinarse con otros contenidos de ésta y otras áreas, por lo que es evaluada de manera frecuente.

[5] Algunos problemas que consisten en la detección de patrones no son problemas matemáticos válidos, pues pueden depender del punto de vista y tener infinitas respuestas posibles. Tales problemas no serán evaluados. Ejemplo de un problema inválido: "Hallar el siguiente número en la sucesión: 2, 4, 6, ...". El problema es inválido pues tiene infinitas posibles respuestas, el patrón podría continuar así: "2, 4, 6, 12, 14, 16, 22, 24, 26, 32, 34, 36, 42, 44, 46, ... ", o así: "2, 4, 6, 6, 8, 10, 10, 12, 14, 14, 16, 18, 18, ...". Note cuán diferente parece el último patrón si se lee de tres en tres (el patrón parece completo), o si se pone atención únicamente a los números que se repiten y los que no se repiten, que ocurren de manera alternada (el patrón parece incompleto pues el 2 "debería" repetirse). Incluso podría no haber un patrón, tal y como se entiende la palabra. Sólo las definiciones pueden depender del punto de vista, no así los problemas en matemática.

= divisor por cociente más residuo). Propiedades de la divisibilidad en los naturales (reflexividad, antisimetría y transitividad). Definiciones de divisor, múltiplo, divisor común, múltiplo común, máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (MCM) para dos o más números. Argumentos vía paridad (por ejemplo: se puede utilizar en un argumento el hecho de que la suma de varios números puede ser impar solamente si entre los sumandos hay una cantidad impar de impares). Criterios de divisibilidad entre números que sean potencias de dos (2,4,8,16,...), potencias de 10, y los criterios de 3, 5, 9 y 11. Algoritmo de Euclides para la determinación del MCD de dos números[6].

3.3 Primos. Número primo y número compuesto. Primos relativos. Criterios para verificar si un número dado es primo (verificar si es múltiplo de algún número mayor que 1 y menor o igual a su raíz cuadrada). Construcción de la criba de Eratóstenes. Definición de primos gemelos. Definición de números perfectos.

3.4 Teorema fundamental de la Aritmética. Comprensión del enunciado del teorema. Factorización en primos de un número natural dado. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números vía sus factores primos. Número de divisores positivos de un número entero (fórmula).

3.5 Operatoria. Suma, resta, multiplicación y división de números enteros, racionales, irracionales y reales. Operaciones con decimales y fracciones. Fracciones equivalentes y simplificación de las mismas. Conversión de números racionales entre las formas siguientes: número mixto, fracción (propia o impropia), número decimal y porcentaje. Potenciación y radicación de enteros y racionales. Leyes de los exponentes y de las raices. Leyes de los signos para la multiplicación o división de números. Jerarquía de las operaciones incluyendo signos de agrupación.

3.6 Orden. Relaciones de orden ($<, >, \leq$ y $\geq$) y sus propiedades (reflexividad, antisimetría y transitividad). Recta de los números reales. Capacidad de ordenar de menor a mayor o de mayor a menor un conjunto dado de números reales, posiblemente expresados mediante combinaciones de operaciones aritméticas. La desigualdad cuadrática como herramienta para elaborar argumentos (la desigualdad cuadrática dice que todo número real elevado al cuadrado da un resultado no negativo).

3.7 Sucesiones y series. Sucesiones aritméticas, sucesiones geométricas, series aritméticas y series geométricas. Fórmula para calcular series aritméticas y series geométricas, en particular la fórmula de Gauss. Sucesiones definidas recursivamente o con forma cerrada. Factorial y su jerarquía en las operaciones. Ecuaciones de recurrencia: concepto, definición de términos iniciales, definición de solución y verificación de que una fórmula cerrada dada sea solución de una ecuación de recurrencia.[7] Ecuaciones de recurrencia para series aritméticas, series geométricas y factoriales.

[6] En algunos textos este método es conocido como el "método de las divisiones sucesivas".

[7] NO se evaluará métodos específicos para la resolución de ecuaciones de recurrencia, como el del polinomio característico; sin embargo, se puede esperar que el alumno conjeture la solución de una ecuación simple, empleando su ingenio, y verifique que cumple las condiciones para ser solución.

3.8 Ecuaciones en enteros.[8] Ecuaciones de dos o **más** variables con soluciones enteras (por ejemplo, encontrar los pares de enteros (x, y) tales que sean solución de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ o aquellas que pueden ser resueltas con el teorema fundamental de la aritmética).

3.9 El lema de Euclides. Conocimiento del enunciado y aplicación de lema de Euclides, que dice: si p es un primo que divide al producto ab, entonces p debe dividir a alguno de los factores: a, b (o tal vez a ambos).[9]

4 — GEOMETRÍA EUCLIDIANA

4.1 Razonamiento espacial. Figuras sólidas construidas con figuras más simples. Estrategias para contar aristas, caras y vértices de figuras sólidas construidas a partir de cubos y otras figuras más básicas. Rotación, traslación y reflexión de figuras sólidas o planas, posiblemente iteradas o combinadas.

4.2 Conceptos básicos. Segmentos de recta, definición de circunferencia, arcos de circunferencia, rectas tangentes a circunferencias, rectas secantes a circunferencias, diámetro y radio de circunferencias. Proporcionalidad como factor de conversión, y conversiones entre medidas lineales, cuadráticas y cúbicas (por ejemplo, de metros cúbicos a centímetros cúbicos).

4.3 Polígonos. Clasificación y nomenclatura de las figuras según el número de lados y otras propiedades (triángulos, cuadriláteros, paralelogramos, rombos, cuadrados, rectángulos, romboides[10], trapecios, trapezoides, pentágonos, hexágonos, etc.). Clasificación de triángulos según sus ángulos y según sus lados. Perímetro y área de figuras geométricas (cuadrado, rectángulo, círculo, triángulo, etc.), fórmula de Herón para el área del triángulo. Vértices, lados y diagonales de polígonos.

4.4 Figuras sólidas o tridimensionales. Volumen y área superficial de algunas figuras geométricas sólidas (esfera, cubo, cilindro, pirámide, prisma y ortoedro[11]); vértices, aristas y caras de figuras sólidas en las que tales conceptos apliquen[12]. Sólidos platónicos o regulares. Característica de Euler.

4.5 Ángulos y circunferencias. Medidas angulares en grados y radianes. Conversión entre medidas. Teorema de la suma de los ángulos internos en un triángulo (180 grados), sumas de los

[8] A este tipo de ecuaciones también se les llama **ecuaciones diofantinas**.

[9] A manera de ejemplo, considere el ejercicio siguiente: demuestre que los únicos números n tales que $n^2 - n$ sea divisible por 7 son los múltiplos de 7 y aquellos que dejan residuo 1 al dividirlos por 7. Demostración: por el lema de Euclides, $7 \mid n(n-1)$ implica que 7 debe dividir a n, o bien a $n - 1$. Estos casos corresponden a los múltiplos y los que dejan residuo 1, respectivamente.

[10] También llamados deltoides. Entre los matemáticos de Guatemala es común la nomenclatura de Julio Rey Pastor, en la que los romboides NO son un caso particular de los paralelogramos, sino que corresponden a la figura geométrica que intuitivamente se identifica con los barriletes (deltoides). En muchos libros europeos y norteamericanos, se le llama romboide al paralelogramo que no es rombo, en nuestro caso a esta figura se le llamará simplemente "paralelogramo general".

[11] También conocido como prisma rectangular recto, o paralelepípedo recto.

[12] Usualmente se estudian en referencia a los llamados poliedros (la generalización de polígono para tres dimensiones).

ángulos internos en cuadriláteros (regulares o irregulares). Ángulos entre paralelas (correspondientes, opuestos por el vértice, y alternos internos y externos). Sectores circulares (perímetro y área). Definición de polígono inscrito y polígono circunscrito a una circunferencia, en particular, definición de cuadrilátero cíclico.

4.6 Semejanza y congruencia. Triángulos semejantes y congruentes. Reconocimiento de figuras geométricas (triángulos y otras) rotadas, trasladadas o dilatadas. Criterios de congruencia de triángulos: lado-lado-lado, lado-ángulo-lado y ángulo-lado-ángulo. Criterios de semejanza de triángulos: lado-lado-lado, lado-ángulo-lado y ángulo-ángulo.

4.7 Teoremas fundamentales. Teorema de los ángulos en la base de un triángulo isósceles (Pons asinorum). Teorema de Pitágoras. El teorema del ángulo central y el del ángulo inscrito. Teorema de Thales. Teorema de las diagonales de un paralelogramo y el de las diagonales de un romboide. Teorema de los ángulos opuestos en un cuadrilátero cíclico.

4.8 Geometría analítica básica. Concepto del plano cartesiano y las coordenadas de un punto. Ecuación de la recta: forma punto-pendiente, forma estándar y forma general. Interceptos en x y en y. Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales y dos variables por el método gráfico.

5 — ÁLGEBRA

5.1 Axiomas. Propiedades de las operaciones suma y producto en el contexto algebraico (asociatividad, conmutatividad, cerradura, distributividad, elemento neutro, elemento simétrico e inverso).

5.2 Conceptos básicos. Definición de polinomio. Diferenciación entre los conceptos de variable y constante. Diferenciación entre los conceptos de dato (constante conocida) e incógnita (constante desconocida). Definición del grado de un polinomio, clasificación de polinomios según el grado (lineal, cuadrático, cúbico, cuártico, quíntico, etc.).

5.3 Operatoria. Operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) aplicadas a polinomios. Operaciones aritméticas básicas aplicadas a expresiones algebraicas más generales (fracciones o radicales simples, esto es, radicales de monomios). División larga de polinomios exacta y con residuo. Expansión de productos y simplificación de expresiones algebraicas, reducción de términos semejantes en polinomios.

5.4 Productos notables. Binomio al cuadrado, producto de binomios conjugados, binomio al cubo, producto de binomios con un término común, cuadrado de un polinomio. Expansión de un binomio a cualquier potencia natural mediante el triángulo de Pascal.

5.5 Factorización. Casos de factorización en una o más variables: factor común, trinomio cuadrado perfecto, tetranomio cubo perfecto, diferencia de cuadrados, suma y diferencia de cubos, factorización por agrupación, factorización de trinomios cuadráticos más generales (por cualquier método), factorización de Sophie-Germain,[13] factorización por la fórmula cuadrática, factorización por división larga o sintética. Definición de polinomio cuadrático irreducible.

5.6 Divisibilidad de polinomios. Definición de la divisibilidad de polinomios, propiedades de la divisibilidad (notar que la antisimetría no aplica en polinomios). Definiciones de múltiplo, divisor, múltiplo común, divisor común, mínimo común múltiplo y máximo común divisor. Algoritmo de Euclides para la determinación del MCD de dos polinomios.[14]

5.7 Teoremas básicos. Definición de raíz de un polinomio, concepto de número complejo[15] como raíz de un polinomio cuadrático irreducible. Enunciado y aplicaciones del teorema fundamental del Álgebra, Teorema del Factor y Teorema del Residuo.

5.8 Ecuaciones, desigualdades e inecuaciones. Diferenciación entre ecuaciones e identidades algebraicas. Resolución de ecuaciones lineales mediante despeje algebraico. Resolución de ecuaciones cuadráticas por completación de cuadrados, casos de factorización y fórmula cuadrática. Discriminante de un polinomio cuadrático y su relación con la naturaleza de las raíces. Concepto de inecuación ($\neq$) y desigualdad ($<, >, \leq$ y $\geq$). Inecuaciones o desigualdad lineal en una variable, representación gráfica (recta numérica) de la solución y por intervalos[16]. Resolución de una inecuación cuadrática en una variable. Resolución de ecuaciones y desigualdades con un valor absoluto. Despejes que involucren operaciones algebraicas inversas, fórmula cuadrática, y valores absolutos. Sistemas de ecuaciones lineales en pocas variables.

5.9 Desigualdades de varias variables. Llevar a cabo argumentos que dependan de una o varias aplicaciones de la desigualdad cuadrática[17] en un contexto algebraico. (por ejemplo, se puede demostrar que $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ multiplicando ambos miembros por 2, pasando a restar los términos de la derecha y así construyendo tres cuadrados perfectos: $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$, y ésta última es cierta por la suma de tres desigualdades cuadráticas).

6 — COMBINATORIA

6.1 Principios. Definición y aplicaciones del principio de la suma y del principio de la multiplicación (como técnicas de conteo), el principio de inclusión y exclusión para pocos conjuntos, y el principio de las casillas o principio de Dirichlet[18].

[13] Es el nombre más común para el caso de factorización de expresiones del tipo $x^4 + 4y^4$

[14] En el Álgebra de Baldor y otros libros es llamado "método de divisiones sucesivas". Es una generalización del método descrito en el apartado de aritmética al contexto de polinomios.

[15] Sólo se requiere la definición de número complejo para entender el teorema fundamental. La operatoria de números complejos y otras propiedades relacionadas se evalúan en el ciclo diversificado.

[16] En los exámenes se aplica el convenio de notación siguiente: un intervalo abierto se representa con paréntesis, en tanto que un intervalo cerrado con corchetes. Así por ejemplo, el intervalo abierto de 3 a 5 es (3,5), mientras que el intervalo cerrado sería [3,5].

[17] La desigualdad cuadrática en el contexto algebraico dice que toda expresión algebraica elevada al cuadrado es mayor o igual a cero. Por ejemplo $(x - \frac{1}{x})^2 \geq 0$, para $x \neq 0$.

[18] Este principio dice: Si se desea clasificar objetos en casillas, con la posibilidad de colocar uno, ninguno, o varios objetos en cada casilla, y si se cuenta con más objetos que casillas, entonces forzosamente habrá una casilla con

6.2 Conteo. Factorial y su conexión con el conteo. Permutaciones (con repetición y sin repetición). Combinación (sin repetición). Fórmulas básicas de conteo: ${}_nP_k$ y ${}_nC_k$. Problemas de conteo que involucran la división por casos[19].

6.3 Grafos. Grafo, vértice y arista. Interpretación de poliedros como grafos. Problemas de conteo en grafos[20].

7 — ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

7.1 Estadística. Medidas de tendencia central (media, mediana, moda). Interpretación y elaboración de tablas de frecuencias. Rango de un conjunto de datos. Frecuencia absoluta, relativa y acumulada. Problemas algebraicos que involucran promedios. Desviación media.

7.2 Probabilidad. Concepto básico de probabilidad para un número finito de eventos (tiros de dados, selección de cartas en una baraja, tiros de monedas, etc.). Probabilidad conjunta de eventos independientes. Concepto de eventos mutuamente excluyentes y, entre ellos, los eventos complementarios. Entender la relación entre los principios de la suma, de la multiplicación, y de inclusión y exclusión con la probabilidad.

más de un objeto.

[19]Por ejemplo: ¿Cuántos números de tres dígitos son tales que su primer y último dígito son iguales? En este caso, se observa que repitiendo el 1 se obtienen números del tipo $1\,\square\,1$, de los cuales hay 10 diferentes, y lo mismo sucede con las otras ocho posibilidades para el dígito repetido, esto es, $9 \times 10 = 90$ números en total.

[20]Por ejemplo: Calcular cuántas estrechadas de mano ocurren entre diez personas, si se sabe que cada persona estrechó la mano una vez con cada una de las otras nueve.