Secretaría Nacional de Ciencia y Tecnología

CONCYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

FONACYT
Fondo Nacional de Ciencia y Tecnología

BOLETÍN DE LAS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA EN GUATEMALA

Artículos, Talleres, Pruebas Nacionales e Internacionales con Soluciones

Ciclo 2010–2011

Año 3

GUATEMALA, NOVIEMBRE DE 2011

Olimpiadas Internacionales de Matemática en Guatemala

Coordinación

- Lic. William Gutiérrez
  Licenciatura en Matemática Aplicada,
  Facultad de Ingeniería, USAC

Profesores-entrenadores

- José Carlos Bonilla
- Hugo García
- Esteban Arreaga
- Antonio González
- Alejandro Vargas
- Marcos Galindo

Editor: William Gutiérrez

Redactores: Mar Girón y William Gutiérrez

Mathematics Subject Classification 2000 (MSC2000): 97U40, 00A07, 11–01, 51–01

Conjunto de tipos: $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX

Documento elaborado con TeX Live 2011, TeXMaker 3.0.2 y GeoGebra 3.2.46
Sistema operativo GNU/Linux Debian 6.0.3 (i386)

`http://sitios.ingenieria-usac.edu.gt/licmate/`

`http://foro.mate304.org/`

Índice general

Prefacio

En el presente ciclo de competencias, los jóvenes participantes en distintas Olimpiadas ganaron para Guatemala varios reconocimientos. En la *Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe* realizada en Colima, México, compitieron los estudiantes Ana Domínguez, Kevin Rivera y Lester Guerra; los resultados fueron de dos *Medallas de Bronce* ganadas por Lester y Ana, segunda niña guatemalteca que obtiene una medalla en una OMCC, y una *Mención Honorífica* ganada por Kevin. En la *Olimpiada Iberoamericana de Matemática* realizada en San José, Costa Rica, el equipo estuvo conformado por los alumnos Alejandra Valdez, Rafael Martínez, Carlos Ramírez y Mario Gómez, se obtuvo una *Medalla de Bronce* a través de Alejandra, primera jovencita en ganar una medala en una OIM, y dos *Menciones Honoríficas* por parte de Rafael y Carlos. Asimismo se tuvo participación en las siguientes competencias:

- *Olimpiada Matemática de Mayo* organizada en Argentina, para niños menores de 15 años, la cual se realiza por correo. Se ganó un *Mención Honorífica.*
- *Olimpiada Iberoamericana Interuniversitaria de Matemática*, en Quito, Ecuador. Primera vez que participa Guatemala con dos estudiantes de la USAC. Se ganaron dos *Medallas de Bronce.*
- *Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria* organizada en México, competencia por correo, no hay resultados hasta el momento.

Agradecimientos

El presente trabajo es financiado a través del contrato FACYT 014–2011 con la Secretaría Nacional de Ciencia y Tecnología (SENACYT). Agradecemos a la Facultad de Ingeniería de la *Universidad de San Carlos de Guatemala (USAC)* por el apoyo brindado durante el ciclo 2010–2011.

Los redactores,
Guatemala, noviembre del 2011

Introducción

La publicación actual es el tercer volumen de la serie iniciada en el 2008, para elaborar material de apoyo para profesores y estudiantes de matemáticas del *nivel medio* y *superior*, correspondiente al ciclo 2010–2011, durante el 2010 no se realizó la publicación al no contar con el financiamiento respectivo.

El presente trabajo estará centrado en las *matemáticas de precálculo*, que son el fundamento en muchas carreras científicas: matemática, física, ingeniería, biología, química y economía, entre otras. Y no son tratadas a profundidad en el ciclo diversificado.

El boletín está dividido en *lecciones*, abarcando el estudio de las ecuaciones y sus aplicaciones, teoría de las funciones, introducción a las funciones polinomiales y la trigonometría con ejemplos de aplicación. Las funciones exponenciales y secciones cónicas se tratarán en un volumen próximo. La teoría se complementa con imágenes procesadas con código PSTricks a partir de salidas de GeoGebra,* éste último pertenece al género de software de geometría dinámica, y está orientado a la enseñanza de la geometría, álgebra y cálculo.

En este volumen además presentamos las pruebas de selección de las delegaciones de los años** 2010 y 2011; y las realizadas en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (OMCC) y la Olimpiada Iberoamericana de Matemática (OIM) del año 2011.

* `http://www.geogebra.org`

** En el año 2010 no se hizo la publicación del Boletín, por tal motivo se incluye este material.

Ecuaciones y Desigualdades

Mar Girón[*] *William Gutiérrez*[**]

Resumen

La lección abarcará de manera formal el estudio y resolución de *ecuaciones*, tópico que se estudian desde el nivel básico de secundaria; se trabaja con una introducción a los *modelos de fenómenos reales* a partir de ecuaciones. Luego se tratan las desigualdades y su resolución, lo cual se hace con abundantes ejemplos. Se finaliza con los conceptos fundamentales de *plano cartesiano*, *rectas* y *circunferencias*.

1.1. Ecuaciones

En matemáticas utilizamos el símbolo de **igualdad** "=" para enlazar dos expresiones y establecer que tienen el mismo valor numérico, en términos coloquiales decimos que *son iguales*, por ejemplo:

1. $2+6=8$
2. $2x-7=3x-89$
3. $(x+1)^2=x^2+2x+1$

En el primer ejemplo es algo obvio a nuestra intuición: *dos más seis es ocho (es igual a ocho)*. Por otro lado en los ejemplos (2) y (3) ya no es tan obvio que los enunciados sean verdaderos, a menos que sepamos el valor (o los valores) de la x que hagan verdaderos a los enunciados, a la x le llamamos **variable** o **incógnita**.

A un enunciado del tipo (1) le llamaremos **igualdad**, a los tipos (2) y (3) les llamamos **ecuaciones**; es decir, una ecuación es una igualdad con *incógnitas* cuyo valor debemos determinar, para verificar el enunciado.

De lo anterior, si en (2) hacemos $x=82$ en ambos lados del signo "=" llegamos a lo siguiente: $2\times 82-7=164-7=157$ (lado izquierdo), $3\times 82-89=246-89=157$ (lado derecho), y tenemos la igualdad $157=157$, y no existe otro valor que cumpla con esta propiedad; por otro lado, en (3) tenemos su veracidad para cualquier valor que le demos a la x, a este tipo de ecuación le llamamos **identidad**.

[*]Ingeniera Civil, Facultad de Ingeniería, USAC.
[**]Matemático, Facultad de Ingeniería, USAC.

A los valores de la incógnita que hacen a la ecuación verdadera les llamamos **soluciones**, **raíces** o **ceros** de la ecuación, y al proceso para determinar tales soluciones le llamamos **resolución de una ecuación**.

Antes de seguir en los métodos o estrategias para resolver ecuaciones, recordaremos unas propiedades algebraicas que son esenciales en la resolución de ecuaciones.

Propiedades de los exponentes y radicales

$$\begin{aligned}
a^m a^n &= a^{m+n} & a^{m/n} &= \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \\
(a^m)^n &= a^{mn} & \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \\
(ab)^n &= a^n b^n & \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a} \\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\
\frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} & a^{-n} &= \frac{1}{a^n}, \quad n > 0
\end{aligned}$$

Productos notables

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 & (x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x-y)^2 &= x^2-2xy+y^2 & (x-y)^3 &= x^3-3x^2y+3xy^2-y^3 \\
x^2-y^2 &= (x+y)(x-y) & & \\
x^3-y^3 &= (x-y)(x^2+xy+y^2) & x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2)
\end{aligned}$$

A continuación damos ejemplos de resolución de ecuaciones.

Ejercicio Resuelto 1.1. Resolver la ecuación

$$11\sqrt{x+1}\sqrt{x-1} = 24\sqrt{\frac{1}{x^2-1}} + \sqrt{(x^2+1)^3}.$$

Solución. Observe detenidamente e identifique patrones, debe aparecer el siguiente término $x^2-1 = (x+1)(x-1)$, de esto podemos hacer:

$$\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1} = \sqrt{(x+1)(x-1)} = \sqrt{x^2-1},$$

por lo que el enunciado del problema se puede transformar en

$$11\sqrt{x^2-1} = 24\sqrt{\frac{1}{x^2-1}} + \sqrt{(x^2-1)^3}.$$

Para facilitar el enunciado haremos el siguiente cambio de variable $u = x^2-1$, y tenemos

$$11\sqrt{u} = 24\sqrt{\frac{1}{u}} + \sqrt{u^3},$$

al usar las propiedades de los exponentes

$$11u^{1/2} = \frac{24}{u^{1/2}} + u^{3/2}.$$

Si multiplicamos ambos lados de la igualdad por $u^{1/2}$, encontraremos

$$\begin{aligned} 11u^{1/2} \cdot u^{1/2} &= \frac{24u^{1/2}}{u^{1/2}} + u^{3/2} \cdot u^{1/2}, \\ 11u &= 24 + u^2 \\ u^2 - 11u + 24 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática anterior, tenemos

$$u = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(1)(24)}}{2}$$

y así $u_1 = 3$, $u_2 = 8$. Sustituyendo estos valores en $u = x^2 - 1$, se tienen las siguientes valores:

- Si $u = 8$, $8 = x^2 - 1$, por lo que $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$.
- Si $u = 3$, $3 = x^2 - 1$, por lo que $x_3 = 2$ y $x_4 = -2$.

Como se puede apreciar, esta igualdad tiene realmente 4 *posibles soluciones*, como paso final procederemos a comprobar las mismas sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación original.

- Si $x = 3$, al sustituir

$$\begin{aligned} 11\sqrt{3+1} \cdot \sqrt{3-1} &= 24\sqrt{\frac{1}{3^2-1}} + \sqrt{(3^2-1)^3} \\ 11\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} &= 24 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} + \sqrt{8^3} \\ 11 \cdot 2\sqrt{2} &= \frac{24}{\sqrt{2^3}} + \sqrt{(2^3)^3} \\ 22\sqrt{2} &= \frac{24}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2^9} \\ 22\sqrt{2} &= \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2^8 \cdot 2} \\ 22\sqrt{2} &= \frac{12\sqrt{2}}{2} + 2^4\sqrt{2} \\ 22\sqrt{2} &= 6\sqrt{2} + 16\sqrt{2} \\ 22\sqrt{2} &= 22\sqrt{2} \end{aligned}$$

en donde $22\sqrt{2} \approx 31.113$, ver figura 1.1.

- Si $x = -3$, al sustituir

$$
\begin{aligned}
11\sqrt{-3+1}\cdot\sqrt{-3-1} &= 24\sqrt{\frac{1}{(-3)^2-1}}+\sqrt{\left((-3)^2-1\right)^3}\\
11\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-4} &= 24\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}+\sqrt{8^3}
\end{aligned}
$$

no podemos seguir, ya que $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-4}$ no son números reales.

- Si $x = 2$, al sustituir

$$
\begin{aligned}
11\sqrt{2+1}\cdot\sqrt{2-1} &= 24\sqrt{\frac{1}{2^2-1}}+\sqrt{(2^2-1)^3}\\
11\sqrt{3}\cdot\sqrt{1} &= 24\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3^3}\\
11\sqrt{3} &= \frac{24}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\sqrt{3^2\cdot 3}\\
11\sqrt{3} &= \frac{24\sqrt{3}}{3}+3\sqrt{3}\\
11\sqrt{3} &= 8\sqrt{3}+3\sqrt{3}\\
11\sqrt{3} &= 11\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

en donde $22\sqrt{2}\approx 19.053$, ver figura 1.1.

- Si $x = -2$, al sustituir

$$
\begin{aligned}
11\sqrt{-2+1}\cdot\sqrt{-2-1} &= 24\sqrt{\frac{1}{(-2)^2-1}}+\sqrt{\left((-2)^2-1\right)^3}\\
11\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-3} &= 24\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3^3}
\end{aligned}
$$

no podemos seguir, ya que $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-3}$ no son números reales.

Como se puede ver, de las cuatro soluciones propuestas solamente dos ($x = 2,3$) cumplen, y las mismas son las únicas soluciones de la ecuación inicial; a los valores $x = -2,-3$ les llamamos **soluciones extrañas**.

Un análisis intuitivo de las posibles soluciones lo tenemos en la figura 1.1, en donde

$$
y_1 = 11\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1} \quad \text{y} \quad y_2 = 24\sqrt{\frac{1}{x^2-1}}+\sqrt{(x^2-1)^3};
$$

con esto, x^* es una raíz (o cero) de la ecuación inicial si x^* es donde se cruzan y_1 con y_2. $\diamond$

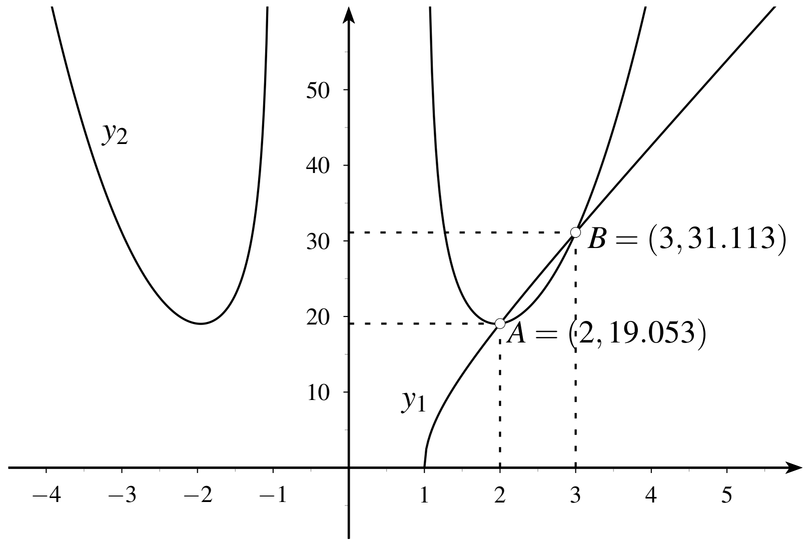


Figura 1.1: Puntos de intersección de y_1 con y_2.

Nota: Observe que se *trabajó algebraicamente* con los términos $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ sin evaluarlos, y únicamente hasta el final se da un *valor aproximado* de ellos, esto es para evitar los **errores de redondeo** (los cuales se van acumulando). Esta práctica le ahorrará muchos problemas al momento de validar sus resultados.

Ejercicio Resuelto 1.2. Resolver la ecuación

$$\frac{2}{\sqrt[3]{y}} - \frac{3}{\sqrt[6]{y}} + 1 = 0.$$

Solución. La ecuación a trabajar se puede transformar en

$$2y^{-1/3} - 3y^{-1/6} + 1 = 0,$$

en donde identificamos $\left(y^{-1/6}\right)^2 = y^{-1/3}$; si hacemos $y^{-1/6} = u$, entonces $y^{-1/3} = u^2$. Sustituyendo en la ecuación original, encontraremos:

$$2u^2 - 3u + 1 = 0.$$

Al solucionar la ecuación cuadrática se obtiene: $u_1 = 1$, $u_2 = 1/2$. Sustituyendo estos resultados en $y^{-1/6} = u$, obtenemos

- Si $u = 1$, entonces $1 = y^{-1/6} = 1/\sqrt[6]{y}$, por lo que $y_1 = 1$.
- Si $u = 1/2$, entonces $1/2 = y^{-1/6} = 1/\sqrt[6]{y}$, por lo que $y_2 = 64$.

Como se puede apreciar, esta ecuación tiene dos posibles soluciones; como paso final procederemos a comprobar las mismas sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación original.

- Si $y = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{1}} - \frac{3}{\sqrt[6]{1}} + 1 &= 0 \\ 2 - 3 + 1 &= 0.\end{aligned}$$

- Si $y = 64$ tenemos

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{64}} - \frac{3}{\sqrt[6]{64}} + 1 &= 0 \\ \frac{2}{4} - \frac{3}{2} + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Y ambas son soluciones de la ecuación. ◇

Nota: Los ejemplos anteriores (y los que siguen) son problemas típicos en las evaluaciones de *Matemática Básica 1* del Departamento de Matemática de la FACULTAD DE INGENIERÍA de la USAC.

Otras ecuaciones comunes a encontrar son aquellas con **valor absoluto**. Para las cuales se deben recordar algunas definiciones y propiedades.

Valor absoluto

Para cualquier número real a, el **valor absoluto** de a denotado por $|a|$ es:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

y representa la distancia de a respecto al origen de la recta numérica.

Propiedades del valor absoluto

1. $|x| \geq 0$ para cualquier real x.

2. $|x| = 0$, si y sólo si $x = 0$.

3. $|x| = |-x|$ para cualquier real x.

4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ para reales cualesquiera x y y.

5. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, siempre que $y \neq 0$.

Ejercicio Resuelto 1.3. Resolver la ecuación $|x-3| = |2x+1|$.

Solución. En este caso, al resolver la ecuación con valor absoluto se tomará en cuenta la definición del mismo

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{si } x-3 \geq 0, \\ -(x-3), & \text{si } x-3 < 0. \end{cases} \qquad |2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } 2x+1 \geq 0, \\ -(2x+1), & \text{si } 2x+1 < 0. \end{cases}$$

Y tenemos los caminos:

Camino A. $(x-3) = -(2x+1)$ equivalente a $-(x-3) = (2x+1)$.

Camino B. $(x-3) = (2x+1)$ equivalente a $-(x-3) = -(2x+1)$.

Procedemos por incisos.

A. Ambas expresiones tienen signos contrarios

$$\begin{aligned} (x-3) &= -(2x+1) \\ x-3 &= -2x-1 \\ (x-3)+2x &= (-2x-1)+2x \\ 3x-3 &= -1 \\ 3x &= 2 \\ x &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

B. Ambas expresiones tienen signos iguales

$$\begin{aligned} (x-3) &= (2x+1) \\ (x-3)-2x &= (2x+1)-2x \\ -x-3 &= 1 \\ -x &= 4 \\ x &= -4. \end{aligned}$$

Como se puede apreciar, esta ecuación tiene dos posibles soluciones, como paso final procederemos a comprobar las mismas sustituyendo los valores.

- Si $x = 2/3$ tenemos

$$\begin{aligned} \left|\frac{2}{3}-3\right| &= \left|2\cdot\frac{2}{3}+1\right| \\ \left|-\frac{7}{3}\right| &= \left|\frac{7}{3}\right| \\ \frac{7}{3} &= \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

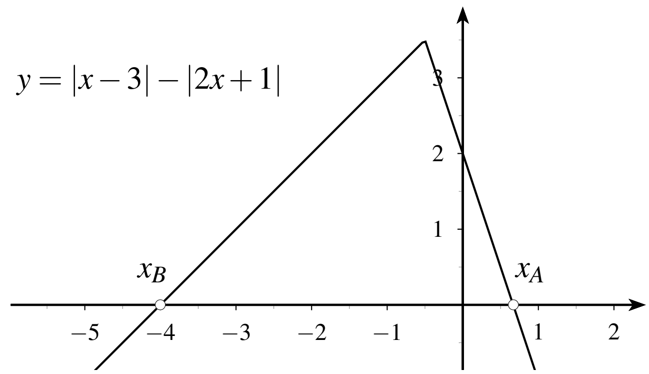


Figura 1.2: En los puntos x_A y x_B se anula la y.

- Si $x = -4$ tenemos

$$\begin{aligned} |-4-3| &= |2\cdot(-4)+1| \\ |-7| &= |-7| \\ 7 &= 7. \end{aligned}$$

Ambas soluciones cumplen con la ecuación, por consiguiente son correctas. ◇

1.2. Modelado con ecuaciones

Muchos fenómenos naturales pueden ser descritos por expresiones matemáticas para hacer una representación cuantitativa, a estas expresiones les llamaremos **modelos**. El procedimiento o estrategia para modelar tales fenómenos es variado, aquí se sugiere el siguiente:

- *Identifique variables.* Identifique la cantidad que el problema le pide determinar, muchas veces existen cantidades desconocidas auxiliares que le servirán para calcular la cantidad principal. Denótelas con símbolos, por ejemplo: x, y, z, t, h, ..., la experiencia le dará el criterio para su notación.

- *Expresar todas las variables auxiliares en términos de la variable principal.* Haga diagramas, esquemas o cuadros para ordenar los datos e incógnitas presentadas. Identificar las relaciones existentes entre datos e incógnitas.

- *Plantear el modelo.* En base a las relaciones identificadas entre datos e incógnitas, **plantear** una ecuación o modelo que describa la relación.

- *Resuelva la ecuación.*

- *Verifique su respuesta.* Esto es importante para validar su modelo respecto a los datos; asimismo, sirve para desechar soluciones **extrañas**.

Es Importante que lea Varias Veces el Problema
Antes, Durante y Después de Haber Propuesto su Modelo.

Existen una infinidad de fenómenos o problemas a modelar, entre los más comunes están:

- Renta de un automóvil.
- Interés de una inversión.
- Dimensiones de un cartel.
- Dimensiones de un terreno para construcción.
- Determinación de la altura de un edificio.
- Mezclas y concentración.
- Tiempo necesario para hacer un trabajo.
- Un problema de distancia-velocidad-tiempo.
- Energía que gasta al volar un ave.

Ejercicio Resuelto 1.4. Cierta marca de pintura viene en dos presentaciones, para *interiores* (60 % tinte, 40 % solvente) y para *exteriores* (80 % tinte, 20 % solvente). Un cliente desea comprar pintura para interiores y para ello pide que le llenen un recipiente con capacidad para 3 galones; el vendedor vierte un primer galón de pintura para interiores en dicho recipiente, luego por error toma un galón de solvente puro y vierte parte del mismo en el recipiente, cuando se da cuenta de su error mide la concentración de la pintura que resulta ser 50 %–50 %. Desesperado y fin de no desperdiciar el producto, decide mezclar dicha pintura con pintura para exteriores.

1. ¿Cuánta pintura al 50 %–50 % se obtuvo al cometer el error?
2. ¿Cuánta pintura de exteriores debe agregarse a fin de recuperar toda la pintura mezclada depositada en el recipiente?
3. ¿Cuánta pintura para interiores faltará por verter en el recipiente?

Solución. Denotemos con x la cantidad de galones de solvente que vierte por error, y la cantidad de pintura para exteriores que necesita para llegar a 60 %–40 %, y z la cantidad final de pintura para interiores que vierte para completar los 3 galones. Procederemos por incisos, iniciamos con los siguientes cuadros

1.^{er} galón para interiores

	%	cantidad de galones
tinte	60	0.6
solvente	40	0.4

$1+x$ galón de solvente

	%	cantidad galones
tinte	50	0.6
solvente	50	$0.4+x$

En este punto, como agregamos *únicamente* solvente, la cantidad de tinte permanece constante, por lo tanto se debe cumplir $0.6 = 0.4 + x$, de donde $x = 0.2$ galones de solvente, de esto la cantidad de pintura es de $\boxed{1.2 \text{ galones}}$.

Ahora le agregamos y galones de pintura para exteriores y tenemos el cuadro resumen

$1.2 + y$ galón para exteriores

	%	cantidad de galones
tinte	60	$0.6 + 0.8y$
solvente	40	$0.6 + 0.2y$

En este caso tenemos las relaciones

$$0.8y + 0.6 = 0.6(1.2 + y),$$
$$0.2y + 0.6 = 0.4(1.2 + y)$$

pues la cantidad de tinte (solvente) debe coincidir con su porcentaje en la mezcla final, en ambas ecuaciones obtenemos $\boxed{y = 0.6 \text{ galones}}$. De lo anterior tenemos $1.2 + 0.6 = 1.8$ galones con las proporciones 60 %–40 %, de donde $1.8 + z = 3$ y con esto $\boxed{z = 1.2 \text{ galones}}$.

Al sustituir los valores para las incógnitas en los cuadros anteriores, es fácil verificar que las cantidades de tinte y solvente corresponden a los porcentajes respecto al total de la mezcla, en cada caso. ◇

Ejercicio Resuelto 1.5. Luis, Pedro y Juan reparten periódicos durante las vacaciones. Pedro puede repartir todos los periódicos en la tercera parte del tiempo que le toma a Juan, y Luis puede repartirlos todos los periódicos en una hora más del tiempo que le toma a Pedro. Si trabajan juntos pueden repartir todos los periódicos en una hora. Determine en cuánto tiempo Pedro puede repartir todos los periódicos.

Solución. Para resolver este problema procederemos a ordenar la información dada, al considerar t tiempo (en horas) que tarda Juan en hacer el trabajo total W.

	Tiempo	Trabajo
Luis	$t/3 + 1$	W
Pedro	$t/3$	W
Juan	t	W
Todos	1	W

En la columna de Trabajo se indica lo mismo para cada una de las personas y para todos, pues se trata de la misma cantidad de periódicos a entregar.

Como siguiente paso identificaremos una ecuación que relacione los datos y variable. Podemos identificar que el trabajo se realiza en un tiempo determinado, estableciendo la siguiente razón

$$\frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} : \text{ trabajo promedio}$$

y podemos dar los trabajos promedio en forma individual y colectiva en el siguiente cuadro

	trabajo/tiempo
Luis	$W/(t/3+1) = 3W/(t+3)$
Pedro	$W/(t/3) = 3W/t$
Juan	W/t
Todos	$W/1 = W$

Como puede observarse al plantearse así el problema, es la fracción del trabajo realizado por cada uno de ellos por unidad de tiempo. En el caso del trabajo colectivo, estamos diciendo que «la suma de las fracciones de trabajo de cada uno permiten terminar todo el trabajo en una hora», por lo que se puede establecer la siguiente igualdad

$$\frac{3W}{t+3} + \frac{3W}{t} + \frac{W}{t} = W$$
$$\frac{3}{t+3} + \frac{3}{t} + \frac{1}{t} = 1$$

ya que $W > 0$.

Resolveremos la ecuación anterior (multiplicando por el mínimo común múltiplo $t(t+3)$ de los denominadores)

$$3t + 3(t+3) + (t+3) = t(t+3)$$
$$3t + 3t + 9 + t + 3 = t^2 + 3t$$
$$t^2 - 4t - 12 = 0$$
$$t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-12)}}{2}$$
$$t = \frac{4 \pm 8}{2}$$

de donde $t_1 = 6$, $t_2 = -2$, como el problema nos pide tiempo, y este no puede ser negativo, tomaremos como respuesta el valor positivo. Al sustituir este valor en las ecuaciones originales, tendremos

	Tiempo	Contribución
Luis	3	$3W/9 = W/3$
Pedro	2	$3W/6 = W/2$
Juan	6	$W/6$
Todos	1	W

Con esto Pedro se tarda 2 horas en repartir los periódicos. ◇

Ejercicio Resuelto 1.6. *Ciudad de Día* y *Ciudad de Noche* se encuentran en los extremos de una carretera recta. A las 12:00 p.m. sale Pablo de Ciudad de Día hacia Ciudad de Noche manejando a una velocidad de 45 mi/h. Simultáneamente sale Nicolás de Ciudad de Noche hacia Ciudad de Día manejando a una velocidad de 30 mi/h. En el punto de intersección Nicolás recuerda que ha olvidado un paquete en Ciudad de Noche y decide regresar, y entra 1 hora con 4 minutos después que Pablo. Halle la distancia entre Ciudad de Día y Ciudad de Noche.

Solución. En general la velocidad v está dada por $v = s/t$ en donde s: distancia, t: tiempo. Si denotamos con l la distancia entre las ciudades, x y y las distancias que recorren Pablo y Nicolás antes de intersectarse, entonces $l = x + y$; y ordenamos los datos e incógnitas en los siguientes cuadros

Antes de Intersectarse

	Pablo	Nicolás
v	45	30
s	x	y
t	t_1	t_1

Después de Intersectarse

	Pablo	Nicolás
v	45	30
s	y	y
t	t_2	$t_2 + 16/15$

En donde t_1 es el tiempo de viaje antes de la intersección de ambos, t_2 es el tiempo que viaja Pablo luego de la intersección, y $1\,\text{h}\,4\text{min} = 16/15\,\text{h}$; como Nicolás viaja a la misma velocidad tanto de ida como de vuelta y recorre la misma distancia, debemos tener $t_1 = t_2 + 16/15$. Por otro lado

$$45 = \frac{y}{t_2} \quad \text{y} \quad 30 = \frac{y}{t_2 + 16/15},$$

de donde $45t_2 = 30(t_2 + 16/15)$ y resolviendo nos da $t_2 = 32/15$; al utilizar la relación entre los tiempos, calculamos $t_1 = 32/15 + 16/15 = 48/15$. Para Pablo $t_1 + t_2 = 80/15$ representa el tiempo total de su viaje, entonces $45 = l/(80/15)$ nos da $\boxed{l = 240\,\text{mi}}$.

Verificando los resultados, calculamos las distancias que cada uno viaja antes de intersectarse: $x = 45(48/15) = 144\,\text{mi}$, $y = 30(48/15) = 96\,\text{mi}$, cuya suma concuerda con la distancia antes calculada. ◇

1.3. Desigualdades

En matemáticas existen otros símbolos para relacionar expresiones:

- $a < b$, significa «*a menor que b*».
- $a > b$, significa «*a mayor que b*».
- $a \leq b$, significa «*a menor o igual a b*».
- $a \geq b$, significa «*a mayor o igual a b*».

En este caso, se establece un *orden* o *jerarquía* entre las expresiones.

A toda expresión en donde aparezca uno de los anteriores símbolos le llamaremos **desigualdad**, por ejemplos: $-5 < 10$, $25 > 10$, $2 \leq 12/6$; si una desigualdad contiene incógnitas (variables) le llamaremos **inecuación**, pero es común seguir llamándola desigualdad, ejemplos: $2x + 5 \leq x^2 - 2$, $100 - x > 3 + 2x$.

Resolver una desigualdad que contiene una variable significa *determinar todos los valores de la variable que hacen a la desigualdad verdadera.*

Operaciones sobre desigualdades

Sean a, b y c números reales cualesquiera, entonces

1. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
2. Si $a < b$ y $c > 0$ (es positivo), entonces $a \cdot c < b \cdot c$.
3. Si $a < b$ y $c < 0$ (es negativo), entonces $a \cdot c > b \cdot c$.

Los problemas a resolver con desigualdades, se pueden clasificar de la siguiente manera:

- Desigualdades lineales.
- Desigualdades simultáneas.
- Desigualdades cuadráticas.
- Desigualdades con cocientes.
- Desigualdades con valores absolutos.
- Modelado con desigualdades.

Ejercicio Resuelto 1.7. Resolver la desigualdad

$$\frac{x}{2} \geq \frac{5}{x+1} + 4.$$

Solución. Procedemos a pasar todos los términos de la desigualdad al lado izquierdo (por ejemplo) y reducimos

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2} - \frac{5}{x+1} - 4 &\geq 0 \\
\frac{x(x+1) - 2 \cdot 5 - 4 \cdot 2(x+1)}{2(x+1)} &\geq 0 \\
\frac{x^2 + x - 10 - 8x - 8}{2(x+1)} &\geq 0 \\
\frac{x^2 - 7x - 18}{2(x+1)} &\geq 0 \\
\frac{(x-9)(x+2)}{x+1} &\geq 0
\end{aligned}$$

al multiplicar por 2 no hay cambios en la desigualdad.

Buscaremos los puntos que dividen a la recta real en intervalos en donde es válida la desigualdad, los cuales los buscaremos en la ecuación

$$\frac{(x-9)(x+2)}{x+1} = 0,$$

de donde $x = -2, -1, 9$, observando que $x = -1$ hace al denominador igual a cero, lo cual evitaremos; así tendremos $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 9)$ y $(9, \infty)$, el trabajo lo ordenaremos en la siguiente tabla (valuando en $(x-9)(x+2)/(x+1)$)

Intervalo	$(-\infty, -2)$		$(-2, -1)$		$(-1, 9)$		$(9, \infty)$
Valor de prueba	-10	-2	-1.5	-1	5	9	10
Valuando	-16.8	0	10.5	`Error`	-4.66	0	1.09
Interpretación	:-(	✓	✓	—	:-(	✓	✓

Para la interpretación únicamente nos sirve el signo, en este caso que el número sea positivo o cero.

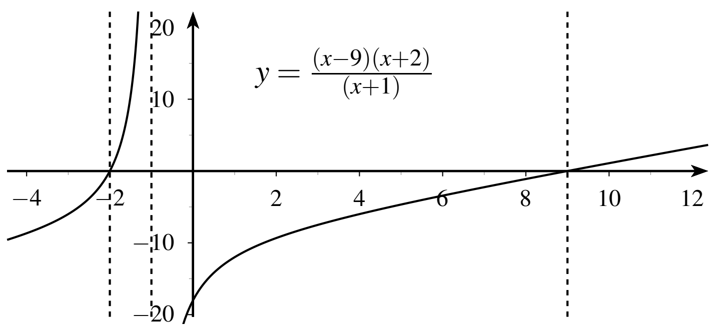


Figura 1.3: Note que en $x = -1$ no está definida y.

Como se puede apreciar entre los valores de prueba se colocaron también los *valores extremos*, pudiéndose concluir que la x debe estar en $[-2, -1) \cup [9, \infty)$, en otras palabras: $-2 \leq x < -1$ ó $9 \leq x < \infty$. $\diamond$

Ejercicio Resuelto 1.8. Resolver la desigualdad

$$5x^2 + 3x \geq 3x^2 + 2.$$

Solución. Procedemos a pasar todos los términos del lado izquierdo, y al reducir términos

$$\begin{aligned} 5x^2 + 3x - 3x^2 - 2 &\geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 2 &\geq 0 \end{aligned}$$

buscaremos los puntos que dividen a la recta real a partir de

$$\begin{gathered} 2x^2 + 3x - 2 = 0 \\ 2(x^2 + 3x/2 - 1) = 0 \\ (x+2)(x - 1/2) = 0 \end{gathered}$$

de donde $x = 1/2, -2$.

Y tenemos los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 1/2)$ y $(1/2, \infty)$; el siguiente paso corresponde en identificar qué intervalos cumplen con la desigualdad, para lo cual nos apoyaremos en el cuadro (valuando en $(x+2)(x-1/2)$)

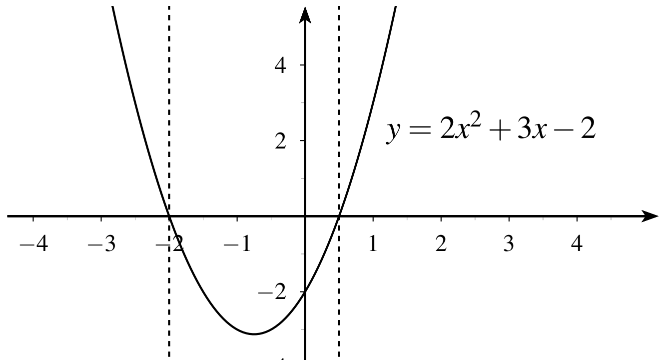


Figura 1.4: En el intervalo $(-2, 1/2)$ la y es negativa.

Intervalo	$(-\infty, -2)$		$(-2, 1/2)$		$(1/2, \infty)$
Valor de prueba	-5	-2	0	0.5	2
Valuando	16.5	0	-1	0	6
Interpretación	✓	✓	:-(	✓	✓

con esto x está en el conjunto $(-\infty, -2] \cup [1/2, \infty)$, es decir que se cumple $-\infty < x \leq -2$ ó $1/2 \leq x < \infty$. Ver la figura 1.4. $\diamond$

Bibliografía

[1] Stewart, J. y otros. *Precálculo — Matemáticas para el Cálculo.* 5.ª edición. México: Editorial Thomson, 2007.

[2] Swokowski, E.W. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* 2.ª edición. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1988.

[3] Zill, D. y otros. *Álgebra y Trigonometría.* 2.ª edición. México: McGraw-Hill, 1992.

[4] Hohenwarter, M. Documento de ayuda de GeoGebra — Manual Oficial de la Versión 3.2. Traducción de Liliana Saidon (Centro Babbage), `www.geogebra.org` (mayo de 2010).

Funciones

Mar Girón[*] *William Gutiérrez*[**]

Resumen

En esta lección se trabaja con el concepto de *función*, base de toda la matemática y ciencias afines; se inicia con tablas de parejas de valores de observaciones del mundo cotidiano, para luego pasar a su representación en el plano cartesiano como *puntos*, con esto se construye una curva suave que los une. Con lo anterior se deducirá una representación matemática, que explique el comportamiento del fenómeno. Asimismo, se harán transformaciones de funciones a partir de operaciones sobre ellas, para terminar con el concepto de *función inversa*.

2.1. Geometría analítica

Esta sección es una *introducción a la Geometría Analítica*, es decir un estudio inicial del plano coordenado xy, fórmulas para la *distancia* y el *punto medio*, *gráfica de funciones*, la *recta*, la *circunferencia* y *simetrías*.

Sistema de coordenadas cartesianas

Un *sistema cartesiano*, *sistema rectangular* o *sistema de coordenadas* se construye en un plano con dos rectas numéricas perpendiculares que se intersectan en el punto que le corresponde al número cero en cada una, al cual llamaremos **origen**.

Las rectas numéricas horizontales y verticales se conocen como **eje** x (**eje de las abscisas**) y **eje** y (**eje de las ordenadas**), respectivamente. Los ejes dividen el plano en cuatro regiones, llamadas **cuadrantes**.

Gráfica de una ecuación

Considerando una ecuación que relaciona dos variables x y y, al conjunto de puntos en el plano que corresponde a los pares ordenados (x, y) en la relación, le llamamos **gráfica de la ecuación**. Entre los conceptos más importantes a considerar al graficar una ecuación se encuentran:

[*] Ingeniera Civil, Facultad de Ingeniería, USAC.
[**] Matemático, Facultad de Ingeniería, USAC.

Intersectos. Se trata de los puntos en los que la gráfica de un ecuación atraviesa los ejes coordenados. Los **intersectos en** x de la gráfica de una ecuación son los puntos en los cuales la gráfica atraviesa al eje x. Los **intersectos en** y de la gráfica de una ecuación son los puntos en los cuales la gráfica atraviesa al eje y.

Simetría. La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto:

- Al eje y si al remplazar x por $-x$ produce una ecuación equivalente.
- Al eje x si al remplazar x por $-x$, y y por $-y$ resulta una ecuación equivalente.

Fórmula de la distancia

La **distancia** $d(P_{1,}P_2)$, entre dos puntos cualesquiera, $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ está dada por

$$d(P_{1,}P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{2.1}$$

Fórmula del punto medio

Las coordenadas del **punto medio** del segmento de recta que une los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ son

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right). \tag{2.2}$$

Circunferencia

Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos P en el plano que están a una distancia fija r dada, llamada **radio**, de un punto fijo C dado, llamado **centro**. Una circunferencia de radio r con centro $C(h,k)$ tiene la ecuación

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2. \tag{2.3}$$

Rectas

Las *rectas* merecen una sección especial de estudio, ya que las mismas representan la base del estudio de varios fenómenos naturales cuyas *variables* son *directamente proporcionales*. Las rectas son descritas en un plano coordenado de forma gráfica, también por su *pendiente* e *intersectos*. Una recta tiene por ecuación general

$$ax+by = c \tag{2.4}$$

en donde a, b y c son números reales.

Pendiente de una recta

La **pendiente** de una recta, denotada por m, la asociaremos como la inclinación de la misma. Si una recta pasa por los puntos $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$, entonces la pendiente de la recta la calculamos así

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}. \tag{2.5}$$

Ecuación de la recta punto-pendiente

La recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m, tiene ecuación asociada

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{2.6}$$

Ecuación de la recta pendiente-intersecto

La recta que pasa por el punto $(0, b)$, su **intersecto** es b, y pendiente m, tiene ecuación asociada

$$y = mx + b. \tag{2.7}$$

Ejercicio Resuelto 2.1. La altura de un niño al año de vida es de 60 cm y al año y medio es de 65 cm. Suponiendo que su edad y altura se relacionan de manera lineal, encuentre:

1. Una ecuación que represente dicha relación.
2. Su altura al nacer.
3. Su altura a los tres años de vida.
4. ¿Cuál es su edad cuando mida 90 cm de altura?

Solución. Nuestra intuición nos indica que al pasar el tiempo x la estatura del niño y debe aumentar, y por la condición del problema debemos tener $y = mx + b$, en donde $x_0 = 0$ indica el momento del nacimiento, $x_1 = 1$ año de vida, y $x_2 = 1.5$ años de vida; construimos la siguiente tabla (x medida en años y y en centímetros)

x	0	1	1.5	3	x_4
y	y_0	60	65	y_3	90

en donde y_0, y_3 y x_4 son los valores a determinar. Al conocer dos puntos de la recta, podemos calcular su pendiente m con (2.5), entonces

$$m = \frac{65 - 60}{1.5 - 1} = \frac{5}{0.5} = 10\,\frac{\text{cm}}{\text{año}},$$

al no conocer el intercecto usaremos la ecuación (2.6) y simplificando

$$\begin{gathered}
y-60=10(x-1)\\
y-60=10x-10\\
y=10x-10+60\\
\boxed{y=10x+50}.
\end{gathered}$$

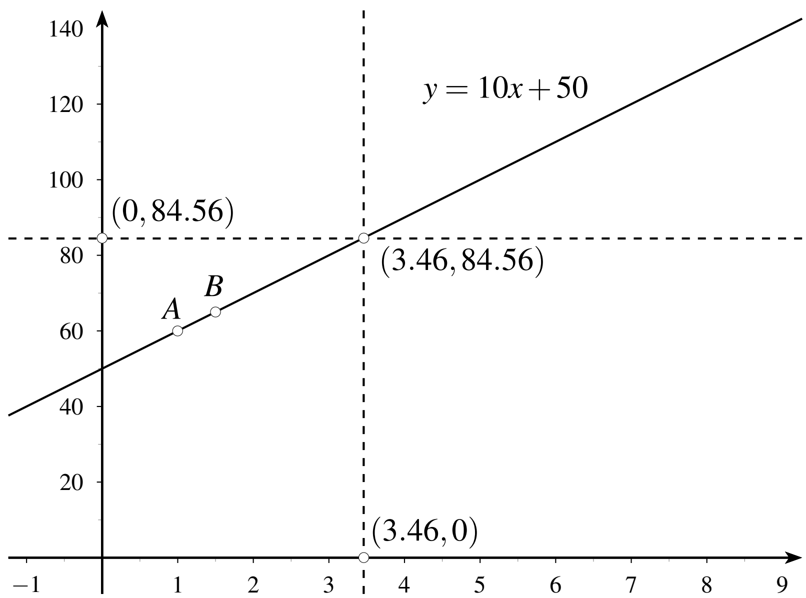


Figura 2.1: Modelo $y = 10x + 50$.

Antes de continuar verificamos si la ecuación cumple las condiciones del problema, cuando $x = 1$, $y = 10 \times 1 + 50 = 60$ ($\checkmark$) si $x = 1.5$, $y = 10 \times 1.5 + 50 = 65$ ($\checkmark$). Por consiguiente $y = 10x + 50$ es el modelo que representa al fenómeno.

Entonces su altura al nacer ($x = 0$) es $y = 10 \times 0 + 50 = 50\,\text{cm}$; su altura a los tres años ($x = 3$) es $y = 10 \times 3 + 50 = 80\,\text{cm}$. El último inciso nos dan el valor $y = 90$ y debemos calcular el valor asociado x, entonces al sustituir $90 = 10x + 50$ y despejar obtenemos $x = (90 - 50)/10 = 4$ años. $\diamond$

Rectas paralelas

Dos rectas no verticales con pendientes m_1 y m_2 son **paralelas** si y sólo si $m_1 = m_2$.

Rectas perpendiculares

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son **perpendiculares** si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$, esto es

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \qquad \text{y} \qquad m_2 = -\frac{1}{m_1}. \tag{2.8}$$

Ejercicio Resuelto 2.2. Sean $A(-8,10)$ y $B(-2,2)$ puntos sobre el plano.

1. Dar la ecuación de la circunferencia que tiene como diámetro al segmento AB.
2. Dar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia por el punto B.

Solución. Nos piden encontrar los valores de h, k y r en la ecuación (2.3); como AB es el diámetro de la circunferencia, el punto medio C de este segmento nos dará las coordenadas del centro (h,k), procedemos conforme a (2.2)

$$C(h,k) = \left(\frac{-8+(-2)}{2}, \frac{10+2}{2}\right) = \left(\frac{-10}{2}, \frac{10+2}{2}\right) = (-5,6),$$

ahora el radio será la distancia del centro a cualquiera de los puntos A, B, de esto

$$r = d(A,C) = \sqrt{\big(-5-(-8)\big)^2 + \big(6-10\big)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

de donde $\boxed{(x+5)^2+(y-6)^2 = 5^2}$.

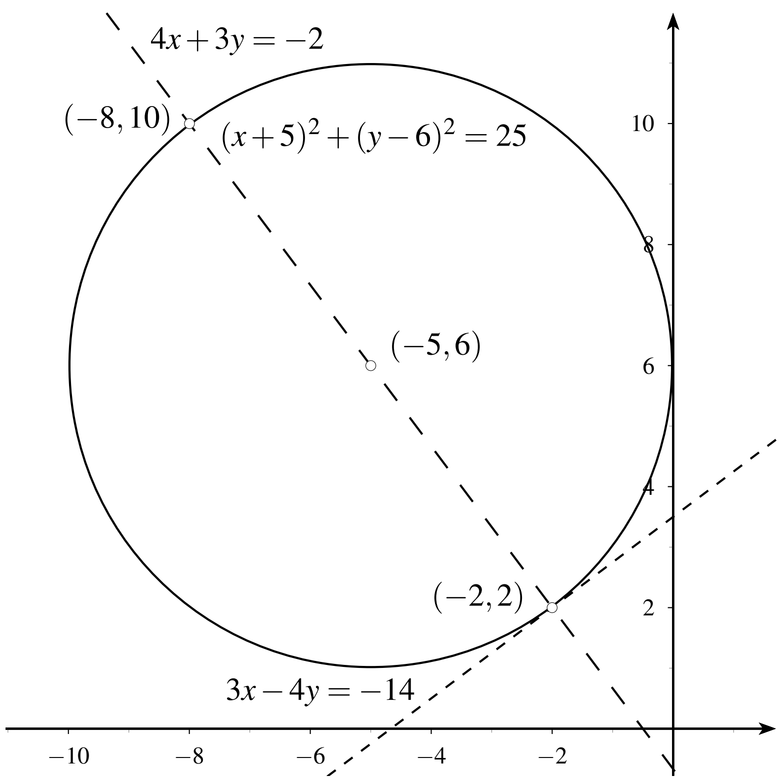


Figura 2.2: Circunferencia y tangente.

La recta debe pasar por $B(-2,2)$ entonces usaremos la ecuación (2.6) y falta calcular la pendiente; sabemos que en una circunferencia: *la recta tangente y el radio (diámetro) por el punto de tangencia son rectas perpendiculares.*

Por consiguiente, si sabemos la pendiente del diámetro m_{AB}, por las igualdades (2.8), es inmediata la pendiente de la tangente $m_{\tan}$ por B.

$$m_{AB} = \frac{2-10}{-2-(-8)} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$$

entonces $m_{\tan} = -1/(-4/3) = 3/4$, al sustituir

$$y-2 = \tfrac{3}{4}\big(x-(-2)\big) = \tfrac{3}{4}(x+2)$$

luego de desarrollar los productos y reducir obtenemos $\boxed{3x-4y=-14}$. ◇

2.2. ¿Qué es una función?

Consideremos a dos conjuntos no vacíos A y B, una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x en A exactamente un elemento $f(x)$ en B. Al conjunto A le llamamos **dominio** de la función y B es el **rango** o **contradominio** de f.

Variable independiente. El símbolo que representa a un elemento en el dominio de una función f.

Variable dependiente. El símbolo que representa a un elemento en el rango de f.

Nota: En lo que sigue trabajaremos con funciones sobre los *números reales*, es decir, sus dominios A y rangos B son conjuntos de números reales $\mathbb{R}$.

Ejercicio Resuelto 2.3. En cierto estado la velocidad máxima permitida en las autopistas es 65 millas/h y la mínima es 40. La multa F por violar estos límites es USD 15 por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo.

1. Complete las expresiones en la siguiente función definida por partes, donde x es la velocidad a la que conduce una persona.

$$F(x) = \begin{cases} \dots, & \text{si } 0 < x < 40, \\ \dots, & \text{si } 40 \le x \le 65, \\ \dots, & \text{si } x > 65. \end{cases} \tag{2.9}$$

2. Determine $F(30)$, $F(50)$ y $F(75)$. ¿Qué representan las respuestas?

Solución. La expresión 2.9 es un ejemplo de una función por partes, específicamente tres partes, cada una de ellas está definida en el enunciado del problema.

- En primera parte se menciona *«... la velocidad máxima permitida en las autopistas es 65 millas/h y la mínima es 40...»*, lo cual indica que si se conduce entre este intervalo, no se debe pagar una multa, por lo cual $F(x) = 0$.

- Después encontramos *«... la multa F por violar estos límites es* USD 15 *por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo...»*, esto señala dos caminos:
  - Si se conduce por debajo de 40 millas/h, se deberá pagar USD 15 por cada milla. Creando una tabla para establecer el valor de la multa encontramos:

Velocidad (millas/h)	Multa (USD)
39	15
38	30
37	45
36	60
35	75

    A partir de esta tabla podemos observar que al disminuir la velocidad, aumenta la multa. De esto, al ir a x millas/h por debajo de las 40 millas/h, se aumenta la multa USD 15 por la diferencia entre el límite mínimo y la velocidad x, es decir

$$F(x) = 15(40 - x) = 600 - 15x.$$

  - Si se conduce a una velocidad mayor de 65 millas/h, se deberá pagar USD 15 por cada milla. Creando una tabla para establecer el valor de la multa encontramos:

Velocidad (millas/h)	Multa (USD)
66	15
67	30
68	45
69	60
70	75

    A partir de esta tabla podemos observar que al aumentar la velocidad, aumenta la multa. Nos podemos dar cuenta que al ir a x millas/h por encima de las 40 millas/h, se aumenta la multa USD 15 por la diferencia entre la velocidad x y el límite máximo de velocidad

$$F(x) = 15(x - 65) = 15x - 975$$

Con lo anteriormente expuesto, se puede responder el inciso 1,

$$F(x) = \begin{cases} 600 - 15x, & \text{si } 0 < x < 40, \\ 0, & \text{si } 40 \leq x \leq 65, \\ 15x - 975, & \text{si } x > 65. \end{cases}$$

En el caso del inciso 2, procederemos a evaluar las velocidades dadas dependiendo del dominio en donde estén

- $F(30):$ La velocidad está por debajo del límite permitido, por lo que aplicaremos

$$F(30) = 600 - 15(30) = 150.$$

El infractor deberá pagar USD 150 por ir debajo de las 40 millas/h.

- $F(50):$ *La velocidad se encuentra entre las 40 y 65 millas/h, por lo que no deberá pagar multa, de donde* $F(50) = 0$.

- $F(75):$ La velocidad está por encima del límite permitido, por lo que aplicaremos

$$F(75) = 15(75) - 975 = 150.$$

El infractor deberá pagar USD 150 por ir sobre 65 millas/h. ◇

2.3. Gráficas de funciones

La gráfica de una función f es el conjunto de las parejas de puntos (x, y) en el plano $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas satisfacen $y = f(x)$, en donde x está en el dominio de f.

- Consideramos al dominio de f como el conjunto de números reales A para los cuales la definición de f tiene sentido en el sistema de los *números reales*.

- El rango de f es el conjunto de los valores posibles $f(x)$ cuando x varía a través del dominio.

$$\text{rango de } f = \{ f(x) \mid x \in A \}.$$

Prueba de la recta vertical

Una curva en el plano coordenado es la gráfica de una función si y sólo si toda recta vertical la corta una sola vez.

Ejercicio Resuelto 2.4. Encuentre el dominio y el rango de la siguiente función.

$$f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

Solución. Como primer paso procederemos a identificar la variable independiente como x, y la variable dependiente como $y = f(x)$, es decir que nosotros propondremos los valores de x para obtener un valor de y.

Construiremos una tabla con estos valores

x	$y = -\sqrt{25 - x^2}$
-5	0
-4	-3
-3	-4

Continuación ...

x	$y=-\sqrt{25-x^2}$
-2	-4.582
-1	-4.898
0	-5
1	-4.898
2	-4.582
3	-4
4	-3
5	0

El siguiente paso consistirá en graficar estas parejas de puntos, ver la figura 2.3

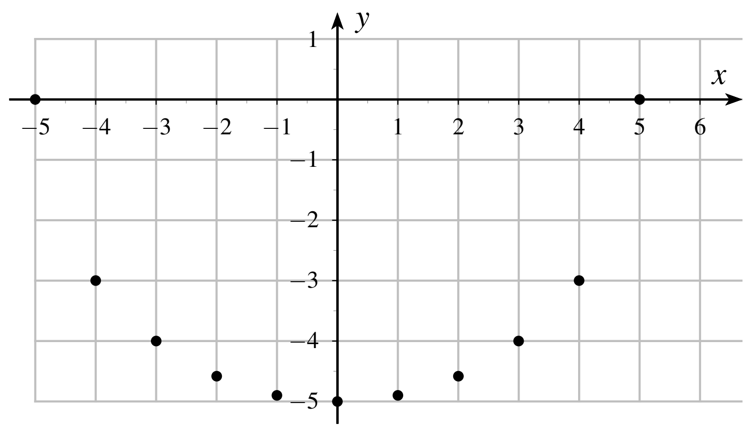


Figura 2.3: Parejas de puntos (x,y).

A simple vista se puede apreciar una semicircunferencia, lo cual podemos constatar al unir los puntos por medio de líneas curvas.

Utilizando GeoGebra, podemos ilustrar la función en la figura 2.4 Ésta permite ver gráficamente el dominio y rango de la función dada.

- El *dominio* de la función es el intervalo [-5, 5] en el eje x.
- El *rango* de la función es el intervalo [-5, 0] en el eje y.

Nos damos cuenta, al evaluar cualquier valor $x>5$ o $x<5$ que obtenemos números fuera del campo de los *reales*. Por ejemplo si $x=-7$, tenemos

$$f(-7)=-\sqrt{25-(-7)^2}=-\sqrt{25-49}=-\sqrt{-24}=-2\sqrt{6}\mathrm{i},$$

la pareja resultante es $(-7,-2\sqrt{6}\mathrm{i})$, estos números los veremos más adelante. $\diamond$

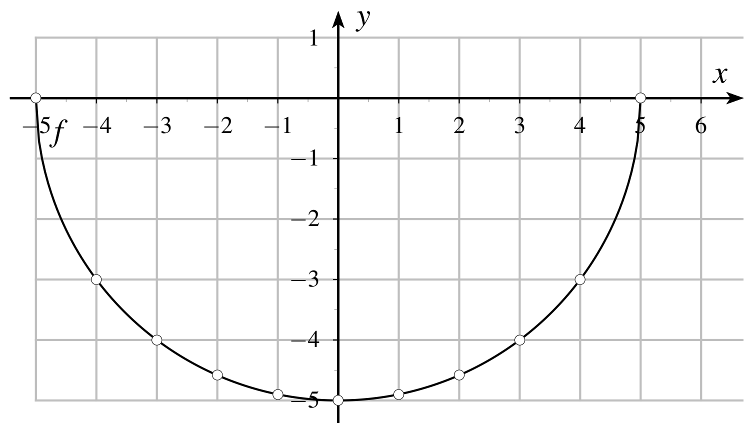


Figura 2.4: Parejas de puntos unidos por una curva.

2.4. Funciones crecientes, decrecientes y tasa de cambio promedio

Como se ha podido apreciar, las funciones se emplean para modelar fenómenos, proyectando el comportamiento de los mismos, determinando en que rangos se espera que *crezcan* o *disminuyan* o cuál es la *tasa de cambio promedio* (o razón de cambio promedio) del fenómeno.

- Decimos que una función f es **creciente** en un intervalo I si $f(x_1) \leq f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

- Decimos que una función f es **decreciente** en un intervalo I si $f(x_1) \geq f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

- La **tasa de cambio promedio** de la función $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ está dada por el cociente

$$\text{tasa de cambio promedio} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ejercicio Resuelto 2.5. Dada la siguiente función $f(t) = \sqrt{t}$, determine la tasa de cambio promedio entre los valores $t = a$ y $t = a + h$, en donde $h \neq 0$.

Solución. La tasa de cambio promedio de la función $f(t) = \sqrt{t}$, para los valores dados es

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - (a)} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}. \qquad \diamond$$

Nota: Expresiones como la anterior son comunes en el estudio del *cálculo diferencial* en Matemática Básica 2.

2.5. Transformación de funciones

Se pueden realizar ciertas transformaciones a una función por la adición, multiplicación de una constante (entre las más sencillas). Las transformaciones a trabajar están el *desplazamiento*, la *reflexión* y el *estiramiento*.

Desplazamiento de gráficas. Si f es una función y k es una constante positiva, entonces

- $f(x)+k$: Traslada hacia arriba k unidades.
- $f(x)-k$: Traslada hacia abajo k unidades.
- $f(x+k)$: Traslada hacia la izquierda k unidades.
- $f(x-k)$: Traslada hacia la derecha k unidades.

Reflexión de gráficas. Si $y=f(x)$ entonces

- La gráfica de $y=-f(x)$ es una reflexión de la gráfica de $y=f(x)$ a través del eje x.
- La gráfica de $y=f(-x)$ es una reflexión de la gráfica de $y=f(x)$ a través del eje y.
- La gráfica de $y=-f(-x)$ es una reflexión de la gráfica de $y=f(x)$ respecto al origen.

Estiramiento de gráficas. Si f es una función y c es una constante positiva.

- Para $y=cf(x)$ tenemos: Si $c>1$, el término alarga (dilata) verticalmente la gráfica de $y=f(x)$ por un factor de c. Si $0<c<1$, el término contrae verticalmente la gráfica de $y=f(x)$ por un factor de c.
- Para $y=f(cx)$ tenemos: Si $c>1$, el término acorta (encoge) horizontalmente la gráfica de $y=f(x)$ por un factor de $1/c$. Si $0<c<1$, el término contrae horizontalmente la gráfica de $y=f(x)$ por un factor de $1/c$.

Ejercicio Resuelto 2.6. Se nos pide trazar la curva de $g(x)=-2|x-1|+3$.

Solución. Si lo hacemos en la computadora o calculadora graficadora obtenemos la figura 2.5.

La elaboración de gráficas de funciones complicadas se puede simplificar, si conocemos la forma de ciertas funciones básicas, entonces si consideramos $g(x)=-2|x-1|+3$, la función básica es $f_0(x)=|x|$ y tenemos en el siguiente orden

1. Una traslación horizontal a la derecha de una unidad, $f_1(x)=f_0(x-1)$.
2. Una reflexión vertical, $f_2(x)=-f_1(x)$.
3. Una dilatación vertical en un factor de dos, $f_3(x)=2f_2(x)$.
4. Una traslación vertical hacia arriba de tres unidades, $f_4(x)=f_3(x)+3$.

De lo anterior tenemos el resultado. $\diamond$

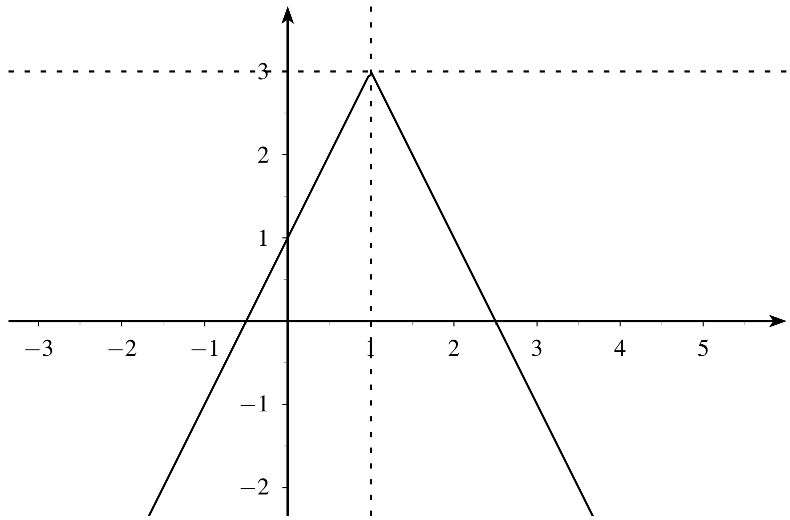


Figura 2.5: $g(x) = -2|x-1|+3$

2.6. Funciones cuadráticas, máximos y mínimos

Una **función cuadrática** es una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Una función cuadrática puede expresarse de la *forma estándar* como

$$f(x) = a(x-h)^2 + k. \tag{2.10}$$

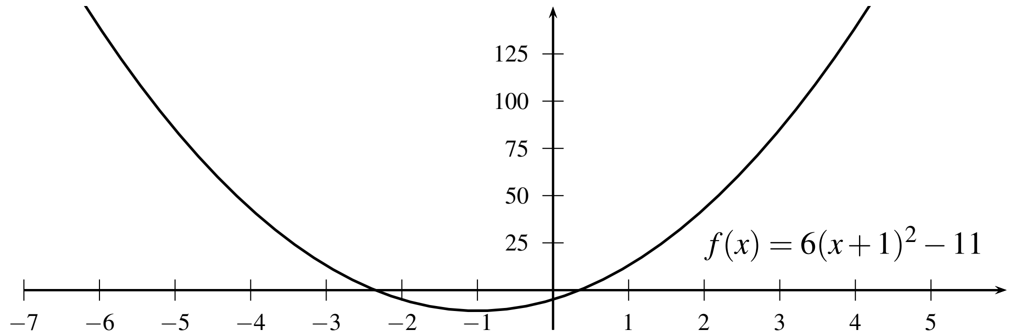
Bajo esta forma se puede apreciar como la gráfica de la función cuadrática simple $f(x) = x^2$ es desplazada hacia arriba k unidades, desplazada hacia la derecha h unidades y sufre un estiramiento en un factor a unidades.

La gráfica de cualquier función cuadrática es llamada **parábola**, con un **vértice** en (h, k). En la forma estándar la parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

Ejercicio Resuelto 2.7. Dar la forma estándar de la función cuadrática $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$, y señale si se abre hacia arriba o hacia abajo.

Solución. Procediendo por pasos

- Para llevarlo a la forma estándar se agruparán los primeros dos términos: $f(x) = (6x^2 + 12x) - 5$.
- Sacaremos como factor común a 6: $f(x) = 6(x^2 + 2x) - 5$.
- Completando el cuadrado del primer término: $f(x) = 6(x^2 + 2x + 1) - 5 - 6$, restamos el mismo término para conservar la función original.
- Encontramos finalmente la forma estándar: $f(x) = 6(x+1)^2 - 11$.



Comparándola con $f(x) = a(x-h)^2 + k$, tenemos $a = 6$; siendo $a > 0$, estará abierta hacia arriba, será *cóncava hacia arriba.*

Para comprobar el resultado procederemos a graficar la función con GeoGebra.

Al observarla, podemos identificar que la parábola es cóncava hacia arriba. ◇

Como se observa en la gráfica de una función cuadrática, dependiendo de su concavidad, la función puede tener un valor máximo o un mínimo en su dominio, este punto será su vértice.

Nota: Un valor máximo o mínimo de una función es el valor más grande o más pequeño de la función en un intervalo.

En el caso de una función cuadrática, si esta se presenta de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, se puede concluir que su vértice estará dado por

$$x = -\frac{b}{2a}, \quad y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}. \tag{2.11}$$

- Con un mínimo (*cóncava hacia arriba*), si $a > 0$.
- Con un máximo (*cóncava hacia abajo*), si $a < 0$.

Por otro lado, si la función cuadrática está presentada de la forma estándar $f(x) = a(x-h)^2 + k$, se puede concluir que su vértice estará dado por

$$x = h, \quad y = f(h) = k. \tag{2.12}$$

Ejercicio Resuelto 2.8. Se lanza una bola en un campo de juego. Su trayectoria está dada por la ecuación $y = -0.005x^2 + x + 5$, donde x es la distancia que la bola ha viajado horizontalmente, y y es la altura sobre el nivel del suelo, ambas medidas en pies.

1. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola?
2. ¿Qué tan lejos ha viajado horizontalmente la bola cuando choca con el suelo?

Solución. El fenómeno estudiado, trayectoria de una bola, puede representarse con una función cuadrática, de la *física fundamental*, por lo que al pedirnos cuál es la altura máxima que alcanza la bola, se trata de encontrar el vértice de la gráfica de la función

$$x = -\frac{b}{2a}, \quad y = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

al tomar $a = -0.005$, y $b = 1$, tenemos que al ser a negativa nos señala una concavidad hacia abajo. Sustituyendo valores obtenemos

$$x = -\frac{1}{2(-0.005)} = 100, \quad y = -0.005(100)^2 + 100 + 5 = 55.$$

Para responder el primer inciso del problema, encontramos que la pareja ordenada del punto máximo es $(100, 55)$. Para responder al segundo inciso se debe considerar que la pelota *choca con el suelo*, es decir, que la pelota tendrá una altura igual a 0; de donde $0 = -0.005x^2 + x + 5$.

Al solucionar esta ecuación encontraremos el valor de x, la distancia horizontal a la que ha viajado al chocar con el suelo, aplicando la *fórmula de cuadrática*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{2.13}$$

encontraremos dos valores

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4(-0.005)(5)}}{2(-0.005)} = -4.88$$
$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4(-0.005)(5)}}{2(-0.005)} = 204.88$$

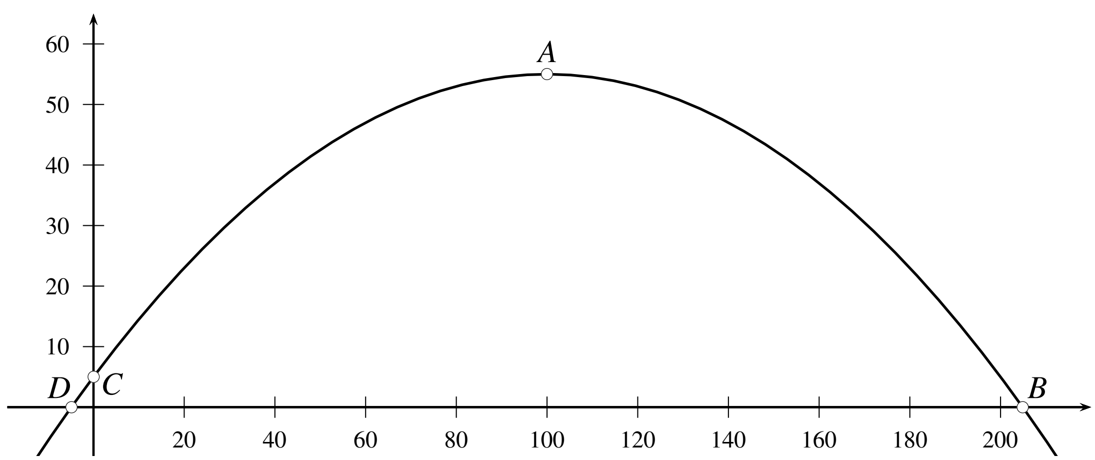


Figura 2.6: Trayectoria de la bola.

Notemos que estos valores de x hacen $y = 0$; al tomar la posición del jugador como el origen del plano donde se desplaza la pelota, inicialmente la pelota partirá desde $x = 0$ y y: distancia entre el suelo y posición de la pelota.

Al identificar el marco de referencia se puede responder al segundo inciso, estableciendo como la distancia horizontal en que se desplaza la pelota antes de chocar con el suelo como de 103.88 pies. Lo anterior lo podemos verificar con la figura 2.6.

Esta gráfica muestra cuatro puntos básicos de la trayectoria de la pelota.

- El punto $A(100, 55)$ señala la posición de la pelota cuando alcanza su altura máxima.
- El punto $B(204.88, 0)$ señala la posición de la pelota al chocar con el suelo.
- El punto $C(0, 5)$ señala la posición de la pelota desde donde es lanzada inicialmente (este punto se obtiene al hacer $f(0)$).
- El punto $D(-4.88, 0)$ completa la gráfica de la función que describe la trayectoria de la pelota. $\diamond$

2.7. Modelado con funciones

En el trabajo diario de la Ingeniería muchas veces deberemos encontrar y trabajar con funciones que describan la dependencia de una variable con respecto a otra, a este proceso le llamamos **modelar** — encontrar un **modelo del fenómeno** y validarlo. En resumen, para realizar este proceso se pueden seguir los siguientes pasos

1. Expresar el fenómeno en términos coloquiales. Identificar las variables que intervienen.
2. Determinar cuál es la *variable dependiente* e *independiente*, asignar símbolos apropiados para facilitar si interpretación.
3. Establecer el modelo, es decir, expresar a través de una función la relación entre la(s) variable(s) independiente(s) y la dependiente, utilizando el lenguaje del álgebra.
4. Emplee el modelo planteado y verifique que cumple con los datos del problema. La representación gráfica de la función ayuda a comprender el comportamiento de las variables entre si.

Notemos que este procedimiento lo utilizamos en la primer unidad.

Ejercicio Resuelto 2.9. Un estudiante fabrica collares. El material de cada collar le cuesta Q 6 y ha estado vendiendo aproximadamente 30 por día a Q 12 cada uno. Ahora se está preguntando si debe subir o bajar el precio, por lo cual hace una encuesta y descubre que por cada incremento de un quetzal al precio del collar perderá dos ventas al día.

1. Construya una función para el precio unitario de un collar en términos del número de collares que vende al día. ¿Cuál es su dominio?
2. Construya una función para la *utilidad* por concepto de ventas de collares al día en términos del número de collares que vende al día. ¿Cuál es su dominio?
3. Determine el número de collares de debe vender al día a fin de maximizar su utilidad.

Solución. Sea x el número de collares que vende al día, haremos una tabla para ver el comportamiento de x y el precio unitario P

x	30	28	26	24	22
$P(x)$	12	13	14	15	16

Entonces $P(x) = 12 + (30-x)/2$, en donde $x = 0, 1, 2, \ldots$ (dominio de $P(x)$).

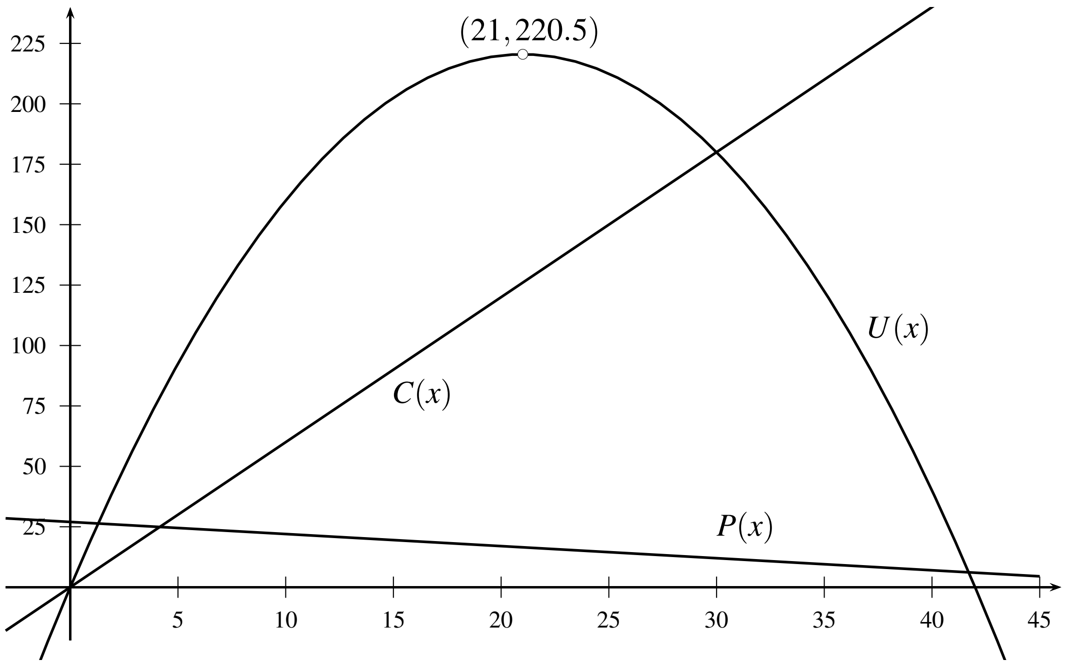


Figura 2.7: Gráficas de $P(x)$, $C(x)$ y $U(x)$.

La utilidad $U(x) = I(x) - C(x)$, en donde $I(x)$ es el ingreso y $C(x)$ es el costo; en donde $I(x) = x \cdot P(x)$ cantidad de ventas por precio unitario, $C(x) = 6x$. Al sustituir y reducir términos

$$U(x) = x\big[12 + \tfrac{1}{2}(30-x)\big] - 6x = 21x - \tfrac{1}{2}x^2 = x\big(21 - \tfrac{1}{2}x\big)$$

cuyo dominio está entre $x = 0$ y $21 - x/2 = 0$ y con esto $0 \leq x \leq 42$ para que $U(x)$ sea positiva, para $x > 42$ la utilidad es negativa; además $a = -1/2$, $b = 21$ y $c = 0$, y $U(x)$ tiene un máximo en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{21}{2(-1/2)} = 21,$$

de donde $U(21) = 21(21 - 21/2) = 220.5$, ver figura 2.7.

Concluimos que el estudiante debe vender 21 collares, a un precio de $12 + (30-21)/2 = 16.5$ quetzales para tener una utilidad de Q 220.50. $\diamond$

2.8. Combinación de funciones

Existen diversas formas de manipular funciones para construir nuevas.

Álgebra de funciones.

Dos funciones f y g se pueden combinar para formar nuevas funciones $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ y f/g si $g(x)\neq 0$. Éstas pueden definirse de la siguiente manera:

Suma de funciones $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, para cada x.

Resta de funciones $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, para cada x.

Producto de funciones $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$, para cada x.

División de funciones $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, para cada x tal que $g(x)\neq 0$.

Función compuesta.

Sean f y g dos funciones, a la función dada por $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)$ le llamaremos **función compuesta** de f con g.

El *dominio* de $f\circ g$ es el conjunto de todas las x del dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f.

Ejercicio Resuelto 2.10. Dadas las funciones

$$f(x)=\sqrt{9-3x}-1,\quad g(x)=4/(x^2-2)\quad \text{y}\quad h(x)=\sqrt{x+2}.$$

Obtener los dominios de $g\circ h$ y f/g.

Solución. Por definición tenemos

$$\begin{aligned}(g\circ h)(x)&=g(h(x))\\&=\frac{4}{[h(x)]^2-2}\\&=\frac{4}{\left[\sqrt{x+2}\right]^2-2}\\&=\frac{4}{x+2-2}=\frac{4}{x}\end{aligned}$$

entonces el dominio de $g\circ h$ son todos los reales menos $x=0$. Por otro lado

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x)&=\frac{f(x)}{g(x)}\\&=\frac{\sqrt{9-3x}-1}{4/(x^2-2)}\\&=\frac{(x^2-2)\big(\sqrt{9-3x}-1\big)}{4}\end{aligned}$$

en este caso el dominio debe cumplir $9-3x\geq 0$, es decir $3\geq x$ o en forma equivalente $x\leq 3$. $\diamond$

2.9. Funciones uno a uno y sus inversas

Una función f con dominio A es **uno a uno** o **inyectiva** si no hay dos elementos distintos en A que tengan la misma imagen, es decir $f(x_1) \neq f(x_2)$, siempre que $x_1, x_2 \in A$ y $x_1 \neq x_2$.

Prueba de la recta horizontal.

Una función f es uno a uno si y sólo si toda recta horizontal cruza su gráfica solamente de una vez.

Las *funciones uno a uno* son las únicas que se les puede asociar *funciones inversas*.

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B, entonces su **inversa** denotada por f^{-1} tiene dominio B y rango A, y es la única que cumple

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

para cualquier y en B. Sus propiedades son:

- $f^{-1}(f(x)) = x$, para toda x en A.
- $f(f^{-1}(x)) = x$, para toda x en B.

Ejercicio Resuelto 2.11. *Marcello's Pizza* fijó como precio base de la pizza grande \$7 más \$2 por cada ingrediente. Por tanto, si usted ordena una pizza grande con x ingredientes, el precio lo dará la función $f(x) = 7 + 2x$. Encuentre f^{-1}, ¿qué representa la función f^{-1}?

Solución. Un camino para obtener f^{-1} es hacer $y = f(x)$, despejar la x en términos de y, y luego intercambiarlas.

- Hagamos $y = 7 + 2x$.
- Resolveremos esta ecuación para x en términos de y
$$x = \frac{y-7}{2}.$$
- Intercambiando y y x
$$y = \frac{x-7}{2} = f^{-1}(x).$$

Esta función representa la *cantidad de ingredientes extra.* ◇

Ejercicio Resuelto 2.12. Dada la función

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$$

determinar

1. Dominio y rango de f.

2. La inversa f^{-1} de f.

3. Graficar f y f^{-1}.

Solución. Como es una función cuadrática su dominio es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, manipulando llegamos a la forma estándar

$$f(x) = (x - 1/2)^2 + 1/4,$$

como $a = 1 > 0$ la parábola abre hacia arriba, con vértice en $(1/2, 1/4)$ y su rango es $[1/4, \infty)$.

Para obtener f^{-1}, f debe ser uno a uno que no es el caso: $f(0) = f(1) = 1/2$; debemos restringir el dominio de f.

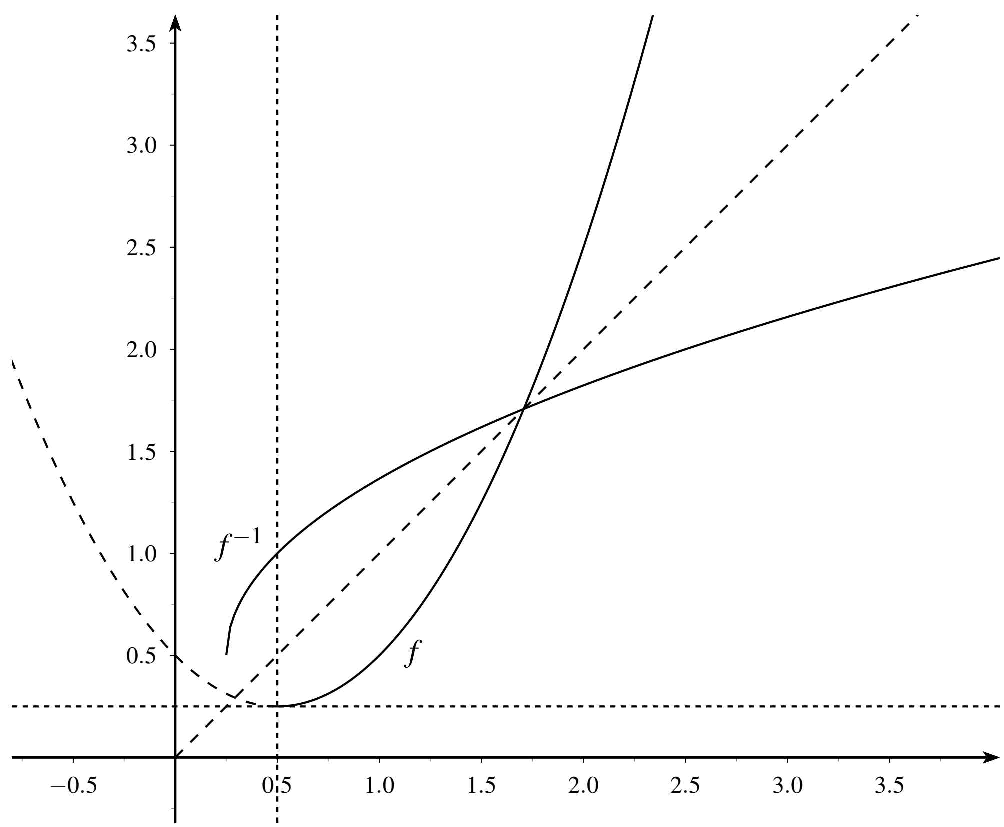


Figura 2.8: Gráficas de f, f^{-1}.

Tomemos $A = [1/2, \infty)$, ya que $x = 1/2$ está el vértice, entonces si $x_1, x_2 \in [1/2, \infty)$, $x_1 \neq x_2$ obtenemos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

De esto $y = x^2 - x + 1/2$, al despejar $x^2 - x + (1/2 - y) = 0$, al usar la fórmula cuadrática

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1/2 - y)}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2 + 4y}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4y - 1}}{2} \end{aligned}$$

al intercambiar y sustituir

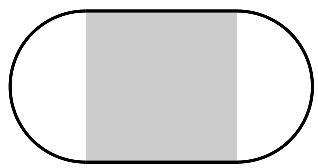
$$f^{-1}(x) = \frac{1+\sqrt{4x-1}}{2}$$

válida si $4x-1 \geq 0$ es decir $x \geq 1/4$; tomamos el signo positivo para que su gráfica sea la reflexión de f respecto a la recta $y = x$.

Resumiendo $f(x)$ dominio $[1/2, \infty)$ y rango $[1/4, \infty)$, $f^{-1}(x)$ dominio $[1/4, \infty)$ y rango $[1/2, \infty)$, ver figura 2.8. ◇

2.10. Problemas propuestos

Problema Propuesto 2.1. Se debe construir una pista de atletismo con dos segmentos rectos y dos semicirculares, el radio de cada segmento semicircular es r. La longitud de la pista debe ser de 1 kilómetro. Exprese el área cubierta A por la pista como una función de r.



Problema Propuesto 2.2. La relación entre grados Celsius T_C y grados Fahrenheit T_F es una función lineal. Exprese T_C como una función de T_F, es decir $T_C = f(T_F)$, si $(32°F, 0°C)$ y $(212°F, 100°C)$ son puntos de la gráfica de T_C. ¿Qué es $T_C(140°F)$?

Problema Propuesto 2.3. Halle $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$, si

$$f(x) = \sqrt{2x-3}, \quad g(x) = x^2+3, \quad h(x) = \sqrt{5x-7}.$$

Problema Propuesto 2.4. Determinar si las funciones $f(x) = (3-2x)^2$, $g(x) = \frac{x-2}{x+2}$ son *uno a uno*. Encontrar sus inversas, en el caso de que no fueran uno a uno, restringir su dominio, de modo que la función resultante lo sea, y poder encontrar su inversa.

Problema Propuesto 2.5. Dadas las funciones $g(x) = 2x+1$ y $h(x) = 4x^2+4x+7$. Encuentre una función f tal que $(f \circ g)(x) = h(x)$.

Bibliografía

[1] Larson, R. y otros. *Cálculo*. 8.ª edición. México: McGraw-Hill, 2006.

[2] Stewart, J. y otros. *Precálculo — Matemáticas para el cálculo.* 5.ª edición. México: Editorial Thomson, 2007.

[3] Zill, D. y otros. *Algebra y Trigonometría.* 2.ª edición. México: McGraw-Hill, 1992.

[4] Hohenwarter, M. Documento de ayuda de GeoGebra — Manual Oficial de la Versión 3.2. Traducción de Liliana Saidon (Centro Babbage), `www.geogebra.org` (mayo de 2010).

Funciones Polinomiales

Mar Girón[*] *William Gutiérrez*[**]

Resumen

Al terminar la lección el estudiante tratará a los polinomios como funciones, y no solamente como objetos cuya operación más difícil es la factorización. Se verá como puden ayudarnos a modelar situaciones reales como: maximizar ganancias, minimizar costos, trazar la trayectoria de un objeto en el espacio, otros. Se darán resultados acerca de sus *raíces* y su clasificación; asimismo, se hará una introducción a los *números complejos*, como raíces de polinomios, y sus propiedades más elementales.

3.1. Funciones polinomiales y sus gráficas

Decimos que una función P es una **función polinomial de grado** n si tiene la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{3.1}$$

donde n es un entero no negativo, a_0, a_1, $\ldots a_n$ son números reales y $a_n \neq 0$.

- Al número n le llamamos **grado** del polinomio.
- A los números a_0, a_1, $\ldots$, a_n les llamamos **coeficientes** del polinomio.
- Al coeficiente a_0 le llamamos **término constante**.
- Al coeficiente a_n le llamamos **coeficiente principal**, y a $a_n x^n$ le llamamos **término principal**.

Las gráficas de las funciones polinomiales son curvas suaves, haciéndose más complicadas conforme aumenta el grado del polinomio.

Nota: Como se ha apreciado en guías anteriores, las gráficas de polinomios de grado cero y uno son *rectas*, y las gráficas de polinomios de grado dos son *parábolas*.

Para graficar una función polinomial, con lápiz y papel, se deben considerar los siguientes pasos:

[*]Ingeniera Civil, Facultad de Ingeniería, USAC.
[**]Matemático, Facultad de Ingeniería, USAC.

- Factorizar el polinomio —si es posible— para hallar todas las intersecciones con el eje x de la gráfica, a los que llamaremos **raíces** o **ceros del polinomio**.

- Construir una tabla de valores para el polinomio, incluyendo puntos de prueba para determinar si la gráfica del polinomio yace arriba o abajo del eje x en los intervalos determinados por los ceros, también incluir la intersección en con el eje y en la tabla (cuando $x = 0$).

- Determinar el comportamiento extremo del polinomio (tendencias); esto ocurre cuando consideramos valores de x está muy alejados del origen por la derecha o la izquierda.

- Trace las intersecciones y los puntos dados en la tabla, bosqueje una curva lisa que pase por estos puntos y exhiba el comportamiento extremo requerido.

Nota: En Matemática Básica 2, se le darán otras herramientas válidas para graficar una gran variedad de funciones distintas a los polinomios. Lo anterior se complementa si se tiene GeoGebra.

DE LO ANTERIOR, SI $x = c$ ES UN CERO DEL POLINOMIO $P(x)$,
ENTONCES c ES UN CERO DE P, ES DECIR $P(c) = 0$.

Teorema 1 (Valor intermedio para polinomios)**.** Sean a y b números reales distintos y P es una función polinomial. Si $P(a)$ y $P(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe por lo menos un valor c entre a y b tal que $P(c) = 0$.

Comportamiento extremo de polinomios

El *comportamiento extremo* de un polinomio P es una descripción de lo que sucede con cuando x crece en la dirección positiva o negativa, este comportamiento está determinado por el *término principal* de P. Utilizando la siguiente notación:

- Cuando x aumenta en la *dirección positiva* escribiremos $x \longrightarrow \infty$.

- Cuando x aumenta en la *dirección negativa* escribiremos $x \longrightarrow -\infty$.

El comportamiento extremo del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ se determina por el grado n y el signo del coeficiente principal a_n.

	P tiene grado impar	P tiene grado par
$a_n > 0$	$P(x) \longrightarrow \infty$ cuando $x \longrightarrow \infty$ $P(x) \longrightarrow -\infty$ cuando $x \longrightarrow -\infty$	$P(x) \longrightarrow \infty$ cuando $x \longrightarrow \infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$
$a_n < 0$	$P(x) \longrightarrow \infty$ cuando $x \longrightarrow -\infty$ $P(x) \longrightarrow -\infty$ cuando $x \longrightarrow \infty$	$P(x) \longrightarrow -\infty$ cuando $x \longrightarrow \infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$

Extremos locales de polinomios

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio de grado n, entonces la gráfica de P tiene intervalos en donde *crece* y otros en donde *decrece*, cuando x recorre su dominio; llamaremos **extremos locales** a los puntos en donde hay un cambio sucesivo de *subida y bajada* (o *bajada y subida*), en el primer caso diremos que P alcanza un **máximo local**, y en el segundo diremos que P alcanza un **mínimo local**.

De lo anterior, éste polinomio tiene *a lo sumo* $n-1$ extremos locales, haga varias pruebas con distintos polinomios de distintos grados y coeficientes, utilice la herramienta `extremo[]` de GeoGebra.

3.2. División de polinomios

Consideremos la división de 14 dentro de 3, la misma no da un resultado exacto pues quedan $2/3$ por repartir, en otra palabras obtenemos $14/3 = 4 + 2/3$ o eliminando los denominadores $14 = 3 \times 4 + 2$, en general cuando se divide un entero positivo p por un entero positivo s distinto de cero, se obtiene un único cociente q y residuo r los cuales cumplen $p = sq + r$.

De forma análoga se realiza con polinomios si usamos la **división larga**, por ejemplo si dividimos $f(x) = x^4 - 16$ entre $g(x) = x^2 + x + 3$ obtenemos

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 \quad -x \quad -2 \\
\hline
x^2+x+3 & x^4 \qquad\qquad\qquad -16 \\
 & -x^4 - x^3 - 3x^2 \\
\cline{2-2}
 & -x^3 - 3x^2 \\
 & x^3 + x^2 + 3x \\
\cline{2-2}
 & -2x^2 + 3x - 16 \\
 & 2x^2 + 2x + 6 \\
\cline{2-2}
 & 5x - 10
\end{array}
$$

Usaremos la siguiente notación: $f(x)$ es el **dividendo**, $g(x)$ el **divisor**, $q(x) = x^2 - x - 2$ es el **cociente** y $r(x) = 5x - 10$ es el **residuo**. Del ejemplo anterior tenemos

$$\underbrace{x^4 - 16}_{f(x)} = \underbrace{(x^2 + x + 3)}_{g(x)}\underbrace{(x^2 - x - 2)}_{q(x)} + \underbrace{(5x - 10)}_{r(x)}.$$

Teorema 2 (Algoritmo de la división)**.** Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios con $g(x) \neq 0$. Entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, donde $r(x) = 0$, o tiene un grado menor al de $g(x)$.

Nota: Es intuitivo que si un polinomio $f(x)$ se divide dentro de $g(x) = x - c$, donde c es un número real, el residuo $r(x)$ es igual a $f(c)$; entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$ y solamente si $f(c) = 0$.

En este punto, usaremos del algoritmo de división para encontrar sus **ceros racionales**, es decir números de la forma p/q, en donde p y q son enteros y $q \neq 0$. Existen varios métodos y procedimientos algebraicos para encontrar los ceros reales de una función polinomial, a continuación describiremos algunos procedimientos básicos para encontrar los mismos.

Teorema 3 (de los ceros racionales)**.** Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional de P es de forma p/q, donde p es un factor del término constante a_0, y q es un factor del coeficiente principal a_n.

División sintética

El procedimiento de la **división sintética** para dividir un polinomio P de grado n, por $x-c$, es:

- Utilizaremos un arreglo numérico de tres renglones.
- Escribir en el primer renglón a c seguido de los coeficientes de P, debe incluirse cualquier coeficiente a_i que sea 0 y el término constante.
- Bajar el primer coeficiente de P a la tercera fila.
- Multiplicar este número por c y escribir el producto directamente debajo del segundo coeficiente de P, luego sumar los dos números en esta columna y escribir la suma debajo de ellos en la tercera fila.
- Multiplicar la suma anterior por c y escribir el producto en la segunda fila de la siguiente columna. Luego sumar los dos números en esta columna y escribir la suma en la tercera fila.
- Repetir el paso anterior tantas veces como sea necesario, hasta llegar al término a_0.
- El último número de la tercera fila es el residuo r; los números que lo preceden en la tercera fila son los coeficientes de $q(x)$, el polinomio cociente de grado $n-1$.

Ejercicio Resuelto 3.1. Utilice la división sintética para hallar un valor de k tal que $f(x) = kx^4 + 2x^2 + 9k$ sea divisible por $g(x) = x - 1$.

Solución. En este caso tenemos $a_4 = k$, $a_3 = 0$, $a_2 = 2$, $a_1 = 0$ y $a_0 = 9k$, entonces el esquema de la división sintética es el siguiente

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & k & 0 & 2 & 0 & 9k \\
1 & & k & k & (2+1k) & (2+1k) \\
\hline
 & k & k & (2+1k) & (2+1k) & (2+10k)
\end{array}$$

para que $g(x)$ sea factor de $f(x)$, el residuo debe ser cero, de donde $2+10k=0$, y obtenemos $k = -1/5$. ◇

Otras herramientas útiles para encontrar los ceros reales son la *Regla de los signos de Descartes* y el *Teorema de las cotas superior e inferior.*

Teorema 4 (Regla de los signos de Descartes)**.** Sea P un polinomio con coeficientes reales. Entonces se cumple:

- El número de ceros reales positivos de P es igual al número de variaciones de signo en $P(x)$ o menor que eso por un número entero par.
- El número de ceros reales negativos de P es igual al número de variaciones de signo en $P(-x)$ o es menor que eso por número entero par.

Teorema 5 (Cotas superior e inferior)**.** Sea P un polinomio con coeficientes reales.

- Si se divide $P(x)$ entre $x-b$ (con $b>0$) por medio de la división sintética, y si el renglón que contiene el cociente y el residuo son elementos no negativos, entonces b es una cota superior para los ceros reales de P.
- Si se divide $P(x)$ entre $x-a$ (con $a<0$) por medio de la división sintética, y si el renglón que contiene el cociente y el residuo tiene elementos que son positivos y negativos en forma alternante, entonces a es una cota inferior para los ceros reales de P.

3.3. Ceros reales de polinomios

En primera instancia daremos un procedimiento que se auxilia del teorema 3 y de la división sintética, el cual consiste en tres pasos

- Listar los posibles ceros racionales usando el teorema de ceros racionales.
- Utilizar la división sintética para evaluar el polinomio en cada uno de los candidatos para ceros racionales propuestos. Llegar a obtener residuo 0.
- Repetir los dos pasos anteriores para el cociente con residuo 0, hasta obtener un cociente cuadrático o de fácil factorización.

3.4. Números complejos

Un **número complejo** es una expresión de la forma $a+\mathrm{i}b$, en donde a y b son números reales y el símbolo i tiene la propiedad $\mathrm{i}^2=-1$, de esto i *no es un número real*. En la práctica utilizamos $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

Es común utilizar z para representar un número complejo, en la forma $z=a+\mathrm{i}b$; de lo anterior, la **parte real** de z es a y la **parte imaginaria** es b. Al conjunto de los números complejos lo denotaremos con $\mathbb{C}$.

Dados a y b números reales, entonces es evidente que $a=a+0\mathrm{i}$ y lo podemos considerar como un número complejo, por otro lado a todo número complejo de la forma $\mathrm{i}b=0+\mathrm{i}b$ le llamaremos **imaginario puro**.

Operaciones con números complejos

Sean $z = a + \mathrm{i}b$ y $w = c + \mathrm{i}d$ dos números complejos, entonces se definen las operaciones

Suma $z + w = (a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$.

Resta $z - w = (a + \mathrm{i}b) - (c + \mathrm{i}d) = (a - c) + \mathrm{i}(b - d)$.

Multiplicación $zw = (a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$.

El **conjugado** de z, denotado por $\bar{z}$, está dado por $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$. Para la **división** z/w haremos uso del conjugado de w, es decir $z/w = (z\bar{w})/(w\bar{w})$, desarrollando

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a + \mathrm{i}b}{c + \mathrm{i}d} \\ &= \left(\frac{a + \mathrm{i}b}{c + \mathrm{i}d}\right) \cdot \left(\frac{c - \mathrm{i}d}{c - \mathrm{i}d}\right) \\ &= \frac{(ac + bd) + \mathrm{i}(bc - ad)}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

El **módulo** de z, denotado por $|z|$, es el número real $+\sqrt{z\bar{z}}$, es decir $|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$.

Ejercicio Resuelto 3.2. Expresar en la forma $a + b\mathrm{i}$ la siguiente expresión

$$\frac{(1 + 2\mathrm{i})(3 - \mathrm{i})}{2 + \mathrm{i}}.$$

Solución. Procedemos inicialmente a operar el numerador

$$\frac{(1 + 2\mathrm{i})(3 - \mathrm{i})}{2 + \mathrm{i}} = \frac{5 + 5\mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}}.$$

El siguiente paso será realizar la división, al utilizar el conjugado de $2 + \mathrm{i}$

$$\frac{5 + 5\mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}} = \frac{5 + 5\mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}} \cdot \frac{2 - \mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}} = \frac{15 + 5\mathrm{i}}{5} = 3 + \mathrm{i}.$$ ◇

Raíces cuadradas de número negativo

Sea $r > 0$ entonces $-r$ es negativo, entonces la **raíz cuadrada principal** de $-r$ está dada por $\sqrt{-r} = \mathrm{i}\sqrt{r}$; las dos raíces cuadradas de $-r$ son $\mathrm{i}\sqrt{r}$ y $-\mathrm{i}\sqrt{r}$.

3.5. Ceros complejos

Al graficar $f(x) = x^2 + 2x + 4$ notamos que la curva no corta al eje x, de donde f no tiene ceros reales, si utilizamos la *fórmula cuadrática* obtenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(4)}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{(-1)(4)(3)}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3} \end{aligned}$$

al sustituir, obtenemos $f(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = f(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = 0$, y f tiene como raíces a $-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$ que son números complejos.

Un polinomio de n-ésimo grado, con coeficientes reales, puede tener a lo sumo n ceros reales, pero si sus coeficientes son números complejos, tenemos el

Teorema Fundamental del Álgebra. Todo polinomio que tiene coeficientes complejos y un grado mayor o igual a 1 tiene por lo menos una raíz compleja.

Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio con coeficientes complejos, entonces al aplicar sucesivamente el teorema anterior obtenemos n ceros complejos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n). \tag{3.2}$$

Asimismo, los *ceros complejos* de polinomios con coeficientes reales vienen en pares, es decir:

Nota: Si el polinomio P tiene coeficientes reales, y si el número complejo z es un cero de P, entonces su complejo conjugado $\bar{z}$ es también un cero de P, es decir, si $P(z) = 0$ entonces $P(\bar{z}) = 0$.

Ejercicio Resuelto 3.3. Dada la función polinomial

$$P(x) = x^4 - x^3 - 15x^2 + 3x + 36.$$

1. Al hacer un análisis completo, encontrar todas las raíces del polinomio.
2. Expresar el polinomio como producto de factores lineales.

Solución. Dado que $n = 4$ el polinomio debe tener cuatro raíces, entre reales y complejas. Usaremos el teorema 4 para determinar la posible cantidad de raíces reales positivas, reales negativas y complejas.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - x^3 - 15x^2 + 3x + 36, \\ P(-x) &= (-x)^4 - (-x)^3 - 15(-x)^2 + 3(-x) + 36 \\ &= x^4 + x^3 - 15x^2 - 3x + 36. \end{aligned}$$

Entonces tenemos 2 raíces positivas (dos cambios de signo) o ninguna raíz positiva, y 2 raíces negativas (dos cambios de signo) o ninguna raíz negativa, se sigue el cuadro

Reales positivas	2	0	2	0
Reales negativas	2	0	0	2
Complejas	0	4	2	2

Con el teorema 5 buscaremos posibles cotas superior e inferior para las raíces reales de P, con $x = -4$ y $x = 5$ tenemos

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -15 & 3 & 36 \\ -4 & & -4 & 20 & -20 & 68 \\ \hline & 1 & -5 & 5 & -17 & 104 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -15 & 3 & 36 \\ 5 & & 5 & 20 & 25 & 140 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 28 & 176 \end{array}$$

entonces -4 es una cota inferior y 5 es una cota superior, es decir, las raíces reales de P están en el intervalo $(-4, 5)$.

Ahora determinaremos las posibles raíces racionales, teorema 3, en este caso $a_4 = 1$ y $a_0 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$, por consiguiente $p = \pm1$, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±18, ±36, y $q = 1$; de donde los posibles ceros racionales son

$$\frac{p}{q} = \pm1, \pm2, \pm3, 4,$$

luego de hacer la división sintética para $x = \pm1$, ±2, 3 obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -15 & 3 & 36 \\ -3 & & -3 & 12 & 9 & -36 \\ \hline & 1 & -4 & -3 & 12 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -3 & 12 \\ 4 & & 4 & 0 & -12 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}$$

y el último cociente es $q(x) = x^2 - 3$ cuyas raíces son $\pm\sqrt{3}$, y la factorización pedida es

$$P(x) = (x+3)(x-4)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right). \qquad \diamond$$

Ejercicio Resuelto 3.4. Para $P(x) = x^5 - 16x$, hacer lo siguiente

1. Factorizar a P en factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

2. Factorizar a P por completo en factores lineales con coeficientes complejos.

Solución. Iniciamos con la factorización del polinomio en factores lineales y cuadráticos; tenemos

$$x^5 - 16x = x(x^4 - 16) = x(x^2 + 4)(x^2 - 4),$$

de donde

$$P(x) = x(x+2)(x-2)(x^2+4),$$

hasta el momento encontramos las siguientes raíces reales

$$x = 0, \qquad x = 2, \qquad x = -2.$$

El factor $x^2 + 4$ es **irreducible**, no se puede factorizar como producto de términos lineales con coeficientes reales, y sólo tiene los ceros imaginarios $\pm 2\mathrm{i}$, pues

$$(\pm 2\mathrm{i})^2 + 4 = 4(-1) + 4 = 0.$$

La factorización completa del polinomio es

$$P(x) = x(x+2)(x-2)(x+2\mathrm{i})(x-2\mathrm{i}).$$

La factorización completa del polinomio señala 5 raíces, de las cuales 3 raíces son reales y 2

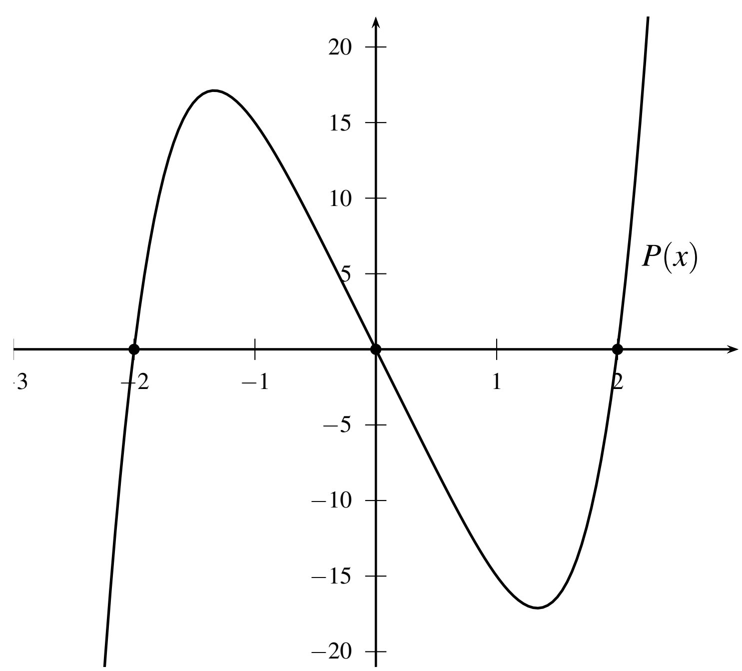


Figura 3.1: Gráfica de $P(x) = x^5 - 16x$.

son imaginarias.

Al graficar la función en el plano real, figura 3.1, comprobamos nuestros resultados. $\diamond$

3.6. Problemas propuestos

Problema Propuesto 3.1. Se observa que la población de conejos es una isla pequeña está dada por la función $f(t) = 120t - 0.4t^4 + 1000$, en donde t es el tiempo (en meses) desde que comenzaron las observaciones en la isla.

1. ¿Cuándo se obtiene la máxima población, y cuál es es población máxima?

2. ¿Cuándo desaparece la población de conejos de la isla?

Problema Propuesto 3.2. Un cohete consta de un cilindro circular recto de 20 metros de alto rematado con un cono cuya altura y diámetro son iguales y cuyo radio es el mismo que el de la sección cilíndrica. ¿Cuál debe ser el radio si el volumen total debe ser $\frac{500}{3}\pi\,\mathrm{m}^3$?

Problema Propuesto 3.3. Utilice la división larga para hallar un valor de k tal que $f(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 + kx^2 + 9x - 5$ sea divisible por $g(x) = x^2 - x + 1$.

Problema Propuesto 3.4. Halle un polinomio cúbico $f(x)$ tal que $f(1) = f(3) = 0$, tal que $f(0) = 1$ y $f(-1) = 4$.

Problema Propuesto 3.5. Halle una función polinomial con coeficientes reales que tenga grado 4, y como raíces a los números i y $3 - \mathrm{i}$.

Problema Propuesto 3.6. Una función polinomial f es desconocida, pero se sabe que tiene grado 7, y algunas de sus raíces son: $c = -1$ de multiplicidad 2, $c = 1 + \mathrm{i}$ y $c = 2$ de multiplicidad 2; la gráfica de la función pasa por el punto $(1, -16)$, determine

1. El coeficiente principal del polinomio.

2. Trace la gráfica de f.

Problema Propuesto 3.7. La flexión y de una viga de 10 pies de largo a una distancia horizontal x de un extremo está dada por

$$y(x) = \frac{1}{4000} \cdot (x^3 - 50x^2).$$

Trace la curva que representa la flexión en la viga y determine la *flexión máxima* y el lugar en que se presenta.

Problema Propuesto 3.8. Como en el ejemplo resuelto 3.3, hacer un análisis completo para las raíces de la ecuación

$$x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 33x^3 - 192x^2 - 30x + 200 = 0.$$

Bibliografía

[1] Stewart, J. y otros. *Precálculo — Matemáticas para el cálculo.* 5.ª edición. México: Editorial Thomson, 2007.

[2] Swokowski, E.W. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* 2.ª edición. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1988.

[3] Derrik, W. *Variable Compleja con Aplicaciones.* México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1989.

[4] Weisstein, E. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics.* EUA: Chapman & Hall/CRC, 1999.

[5] Zill, D. y otros. *Algebra y Trigonometría.* 2.ª edición. México: McGraw-Hill, 1992.

[6] Hohenwarter, M. Documento de ayuda de GeoGebra — Manual Oficial de la Versión 3.2. Traducción de Liliana Saidon (Centro Babbage), `www.geogebra.org` (mayo de 2010).

Funciones Trigonométricas

Mar Girón[*] *William Gutiérrez*[**]

Resumen

La lección dará a las *razones trigonométricas* en triángulos rectángulos como funciones que pueden ser extendidas a triángulos más generales, incluso como funciones de números reales más alla de una interpretación geométrica. Se darán identidades elementales para luego tratar con identidades más complicadas, y ecuaciones que involucran funciones trigonométricas. Se tratan problemas reales en donde son necesarias estas funciones.

4.1. Ángulos

Un **ángulo** es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen conocido como **vértice**. Para medir un ángulo, se debe comparar con uno que se toma por unidad.

Ejercicio Resuelto 4.1. ¿Cuál es la medida en el sistema sexagesimal del ángulo $\pi/32$ en el sistema circular? Usaremos el cuadro en la página 48.

Solución. Para transformar la medida del sistema circular al sistema sexagesimal se aplicarán las siguientes relaciones

Sistema circular:	1 circunferencia = 2π
Sistema sexagesimal:	1 circunferencia = 360°

Y debemos utilizar una de las razones: $2\pi/360^\circ$, $360^\circ/2\pi$. En este caso se desea pasar de radianes a grados sexagesimales (utilizamos la segunda razón)

$$\frac{\pi}{32} \times \frac{360^\circ}{2\pi} = 5.625^\circ.$$

En el caso de los 5.625 grados sexagesimales, el ángulo medido tiene 5 grados sexagesimales y 625 milésimas de grado, los cuales pueden ser representados como minutos ($'$) y segundos ($''$) sexagesimales.

[*]Ingeniera Civil, Facultad de Ingeniería, USAC.
[**]Matemático, Facultad de Ingeniería, USAC.

En base a la definición presentada, se aplicará la siguiente relación: $1^\circ = 60'$. A partir de ésta llegamos a las siguientes razones: $1^\circ/60'$, $60'/1^\circ$. Al tener 0.625 grados sexagesimales, el cual se desea pasar a minutos sexagesimales, con esto

$$0.625^\circ \times \frac{60'}{1^\circ} = 37.5'$$

de donde $\pi/16 = 5^\circ 37.5'$.

Siguiendo con la definición presentada, tenemos: $1' = 60''$. A partir de ésta obtenemos: $1'/60''$, $60''/1'$. En este caso se tiene $0.5'$ el cual se desea pasar a segundos sexagesimales

$$0.5' \times \frac{60''}{1'} = 30'',$$

de donde $\pi/32 = 5^\circ 37' 30''$ (sexagesimales). ◇

Existen varios sistemas para medir ángulos, aquí presentaremos tres: el *sistema sexagesimal*, *centesimal* y *circular*.

Sistema	Nombre de la unidad y subunidades	Construcción
Sexagesimal	Grado, minutos y segundos sexagesimales	Se considera una circunferencia dividida en 360 partes iguales llamadas grados sexagesimales. Cada *grado sexagesimal* ($^\circ$) se considera dividido en 60 partes iguales llamadas *minutos sexagesimales* ($'$), y cada minuto sexagesimal está dividido en otras 60 partes iguales llamadas *segundos sexagesimales* ($''$).
Centesimal	Grado, minutos y segundos centesimales	Se considera una circunferencia dividida en 400 partes iguales llamados *grados centesimales*. Cada grado centesimal se considera dividido en 100 partes iguales llamadas *minutos centesimales*, y cada minuto centesimal está dividido en otras 100 partes iguales llamadas *segundos centesimales*.
Circular	Radián	Un *radián* es el ángulo cuyos lados comprenden un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia. La longitud de una circunferencia es 2π radianes; por lo común no se hace referencia a esta medida y se escribe únicamente 2π.

Para la solución de problemas con ángulos es necesario conocer algunos conceptos:

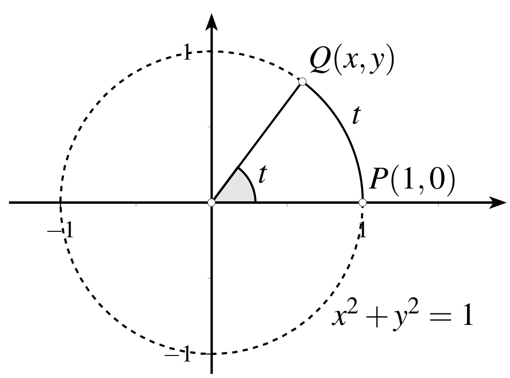
- Dos ángulos se dice que son **complementarios** si sumados valen un ángulo recto ($= 90^\circ$ sexagesimales).
- Dos ángulos se dice que son **suplementarios** si sumados valen 180° sexagesimales.
- Dos rectas en un plano se dice que son **paralelas** si al prolongarlas no tienen ningún punto en común.

4.2. Círculo unitario

El **círculo unitario** o **círculo trigonométrico** es el que tiene un radio igual a 1 y su centro está en el origen de el plano xy. Su ecuación es $x^2 + y^2 = 1$.

Suponiendo que t es un número real, al recorrer una distancia t a lo largo del círculo unitario, empezando en el punto $P(1,0)$ y al hacer un desplazamiento en sentido contrario a las manecillas del reloj tenemos que t es positiva, y en sentido contrario decimos que t es negativa.

Al trasladarse sobre la circunferencia hasta un punto $Q(x,y)$, de la forma antes descrita, se está desplazando una distancia t y la medida en radianes del ángulo formado por los puntos P, O —como vértice— y Q es t, es decir $\measuredangle POQ = t$ radianes.



El perímetro del círculo unitario es 2π, es decir, si se empieza el recorrido en $P(0,1)$ y se llega a este punto siguiendo la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, la distancia es de 2π.

4.3. Funciones trigonométricas de números reales

Sea t un número real y sea $Q(x,y)$ el punto sobre el círculo unitario determinado por t. Se definen las siguientes funciones

seno $\operatorname{sen} t = y$, su dominio es $\mathbb{R}$.

coseno $\cos t = x$, su dominio es $\mathbb{R}$.

tangente $\tan t = y/x$ en donde $x \neq 0$, su dominio son todos los números reales diferentes de $\pi/2 + n\pi$ para cualquier n entero.

cosecante $\csc t = 1/y$ en donde $y \neq 0$, su dominio son todos los números reales que no sean de la forma $n\pi$ para cualquier n entero.

secante $\sec t = 1/x$ en donde $x \neq 0$, su dominio son todos los números reales diferentes de $\pi/2 + n\pi$ para cualquier entero n.

cotangente $\cot t = x/y$ $y \neq 0$, su dominio son todos los números reales distintos de $n\pi$ para cualquier entero n.

A las anteriores funciones les llamamos **funciones trigonométricas**; éstas se relacionan entre si mediante las *identidades fundamentales* siguientes

Identidades recíprocas

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}; \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{\tan t}; \tag{4.1}$$

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}; \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t}. \tag{4.2}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1, \tag{4.3}$$

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t, \tag{4.4}$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t. \tag{4.5}$$

4.4. Gráficas de funciones trigonométricas

Al graficar las funciones trigonométricas se deben considerar algunas propiedades de las mismas, adicionales a las estudiadas en la LECCIÓN 2 para funciones en general.

Propiedades periódicas del seno y el coseno

Las funciones *seno* y *coseno* tienen un período de 2π.

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x; \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

para cada número real x. Asimismo tienen un valor máximo de 1 y un mínimo de -1.

Las funciones seno y coseno tienen las expresiones generales

$$y(x) = a \operatorname{sen} kx; \qquad y(x) = a \cos kx$$

en donde $k > 0$, la **amplitud** es $|a|$ y el **período** está dado por $2\pi/k$.

Estas funciones pueden ser desplazadas horizontalmente, encontrando

$$y(x) = a \operatorname{sen} k(x - b); \qquad y(t) = a \cos k(x - b)$$

en donde $k > 0$ y el **desplazamiento de fase** es b.

Propiedades periódicas de la tangente y cotangente

Las funciones de *tangente* y *cotangente* tienen un período de π.

$$\tan(x+\pi) = \tan x; \qquad \cot(x+\pi) = \cot x$$

para cada número real $\pi/2 + n\pi$ en el caso de la tangente, y $x \neq n\pi$ en el caso de la cotangente, con $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ en ambos casos. No tienen máximo o un mínimo.

Las funciones tangente y cotangente tienen las expresiones generales

$$y(t) = a \tan kx; \qquad y(t) = a \cot kx$$

con $k > 0$, y un período π/k .

Propiedades periódicas de la cosecante y secante

Las funciones *cosecante* y *secante* tienen período 2π.

$$\csc(x+2\pi) = \csc x; \qquad \sec(x+2\pi) = \sec x$$

para cada número real $x \neq n\pi$ en el caso de la cosecante, y $\pi/2 + n\pi$ en el caso de la secantes, con $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ en ambos casos.

Ejercicio Resuelto 4.2. Se golpea un diapasón, lo cual produce un tono puro cuando sus puntas vibran. Las vibraciones se modelan con la función $v(t) = 0.7\,\mathrm{sen}(880\pi t)$, en donde $v(t)$ es el desplazamiento de las puntas en milímetros en el tiempo t medido en segundos.

1. ¿Cuál es el período de la vibración?

2. ¿Cuál es la frecuencia de la vibración?

Solución. El período T es

$$T = \frac{2\pi}{880\pi} = \frac{1}{440}.$$

La **frecuencia** ν es el recíproco del período, es decir

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{1/440} = 440 \, \text{períodos por segundo.}$$ ◇

Ejercicio Resuelto 4.3. La figura 4.1 muestra la gráfica de una función trigonométrica f, trazada en un período. Halle una expresión para ella.

Solución. Para determinar la amplitud consideramos el valor máximo y el mínimo que alcanza la función, en este caso son 7 y -3, por consiguiente la amplitud es

$$a = \frac{7-(-3)}{2} = 5.$$

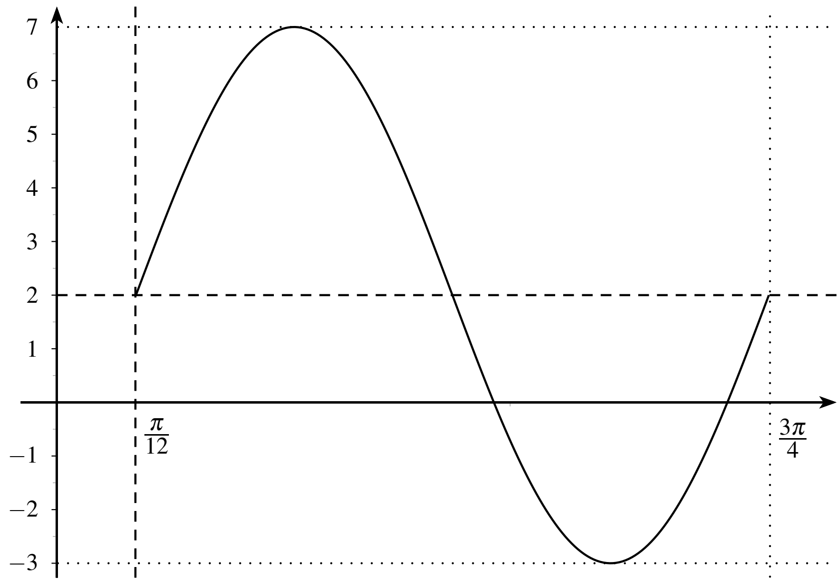


Figura 4.1: Análisis de gráficas trigonométricas.

El período inicia en $\pi/12$ y termina en $3\pi/4$, de donde $T = 3\pi/4 - \pi/12 = 2\pi/3$, y el valor de k lo obtenemos de

$$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi/3} = 3.$$

Al considerar los nuevos ejes (trazos punteados) vemos que la gráfica corresponde a un seno, estos ejes están desplazados $\pi/12$ unidades hacia la derecha en el eje x y 2 unidades hacia arriba en el eje y.

El desplazamiento de fase $b = \pi/12$ y tenemos la función

$$f(x) = 2 + 5\operatorname{sen} 3(x - \pi/12).$$

Para verificar, elaborar la gráfica de esta función en GeoGebra. ◇

4.5. Medición de ángulos

Como se presentara en la sección 4.1, existen distintas unidades de medida para ángulos, entre estas se encontraban los *grados sexagesimales* y *radianes*. La relación entre grados y radianes es $180^\circ = \pi$ radianes.

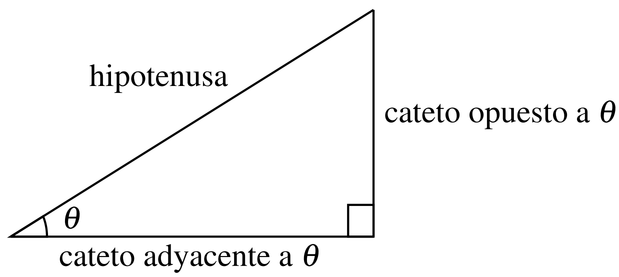
Un ángulo cuya medida en radianes es θ subtiende sobre la circunferencia unitaria, un arco cuya medida es la fracción $\theta/(2\pi)$; de esto, para una circunferencia de radio r, la longitud s de un arco que subtiende un ángulo θ es $s = \theta r$.

El **área de un sector circular** en un círculo de radio r está dada por

$$A_{\text{sec}} = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

4.6. Trigonometría de triángulos rectos

Considerando un triángulo rectángulo con θ, uno de sus ángulos formado por la hipotenusa y uno de sus catetos



Las **razones trigonométricas** en un triángulo rectángulo cumplen

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, & \cos\theta &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}, & \tan\theta &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}},\\
\csc\theta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}, & \sec\theta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}, & \cot\theta &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio Resuelto 4.4. Un aeroplano vuela a una altitud de 25 000 pies, y se aproxima a una estación de radar localizada en una colina de 2 000 pies de altura. En un instante el ángulo entre el radar que apunta hacia el avión y la horizontal es de 57°. ¿Cuál es la distancia entre el avión y la estación de radar en ese instante?

Solución. Al hacer un bosquejo de la situación, obtenemos la figura 4.2, en donde tomamos como base la horizontal sobre la cual está el radar, la altura h (segmento perpendicular a la horizontal) a la cual vuela el avión es $25\,000 - 2\,000 = 23\,000$.

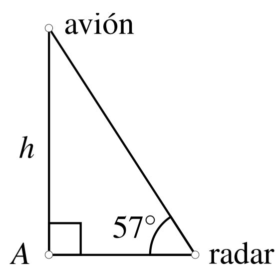


Figura 4.2: Altura sobre la horizontal $h = 23\,000$.

Ahora tenemos un triángulo rectángulo, en donde la hipotenusa d_{ar} es la distancia entre el avión y el radar; entonces

$$\operatorname{sen} 57^\circ = \frac{h}{d_{\text{ar}}}$$

al despejar $d_{\text{ar}} = 23\,000/\operatorname{sen} 57^\circ \approx 23\,000/0.83867 \approx 27\,424.4$ pies. ◇

Ejercicio Resuelto 4.5. Un faro que gira una vuelta cada 96 segundos, está localizado en frente de una playa recta. A los cuatro segundos de haber iluminado el punto más cercano sobre la costa (denotado por O), ilumina un punto P sobre la costa y otros cuatro segundos después, ilumina otro punto Q también sobre la costa, que esta a 180 metros de P. Determine la distancia d del faro a la costa.

Solución. Sea h la distancia en metros de O a P, entonces la distancia de O a Q es $h+180$.

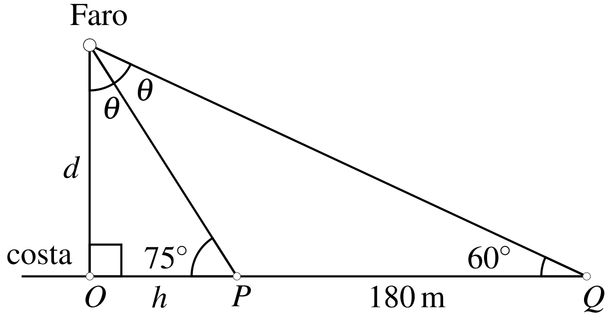


Figura 4.3: Representación esquemática.

El giro de una vuelta en 96 segundos equivale a 360°, sea θ el ángulo de giro en 4 segundos, entonces de una regla de tres, obtenemos

$$\theta = \frac{(4\,\mathrm{s})(360^\circ)}{96\,\mathrm{s}} = 15^\circ,$$

luego usamos el hecho que la suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180°. De los triángulos rectángulos $\triangle FOP$ y $\triangle FOQ$ obtenemos las relaciones

$$\tan 75^\circ = \frac{d}{h}, \qquad h = \frac{d}{\tan 75^\circ}, \tag{4.6}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{d}{h+180}, \qquad d = (h+180)\tan 60^\circ. \tag{4.7}$$

Al sustituir (4.6) en (4.7) y reducir tenemos

$$\begin{aligned}
d &= \left(\frac{d}{\tan 75^\circ} + 180\right)\tan 60^\circ \\
d &= \frac{d}{\tan 75^\circ}\tan 60^\circ + 180\tan 60^\circ \\
\left(1 - \frac{\tan 60^\circ}{\tan 75^\circ}\right) d &= 180\tan 60^\circ \\
d &= \frac{180\tan 60^\circ}{1 - \tan 60^\circ/\tan 75^\circ} \\
d &\approx 581.77\,\text{metros.}
\end{aligned}$$

◇

4.7. Funciones trigonométricas de ángulos

Diremos que el ángulo θ está en **posición estándar** sobre el plano xy, si su vértice está en el origen y uno de sus lados está sobre el eje x, sobre el otro lado consideremos al punto $P(x,y)$. Sea $r=\sqrt{x^2+y^2}$, entonces r es la distancia del origen al punto $P(x,y)$, entonces se sigue

$$
\begin{array}{lll}
\operatorname{sen}\theta=\dfrac{y}{r}; & \cos\theta=\dfrac{x}{r}; & \tan\theta=\dfrac{y}{x}, \quad x\neq 0; \\
\csc\theta=\dfrac{r}{y}, \quad y\neq 0; & \sec\theta=\dfrac{r}{x}, \quad x\neq 0; & \cot\theta=\dfrac{y}{x}, \quad x\neq 0.
\end{array}
$$

Las *funciones trigonométricas de ángulos* están relacionadas entre ellas por identidades recíprocas (4.1-4.2) y pitagóricas (4.3-4.5) al intercambiar t por θ.

4.8. Ley de senos y ley de cosenos

Todo triángulo puede descomponerse en triángulos rectángulos, y deducir sencillas leyes y fórmulas que relacionan sus lados y ángulos; en la figura 4.4 se muestra la nomenclatura a usar.

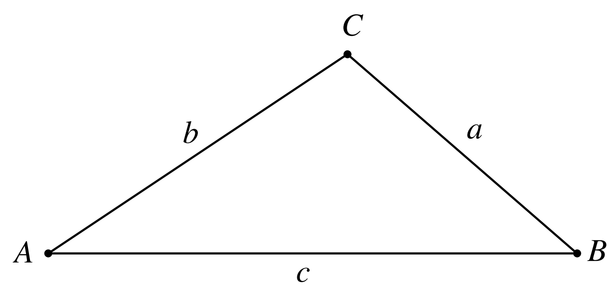


Figura 4.4: Ley de senos y cosenos.

Ley de Senos. En cualquier triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos correspondientes.

$$\frac{\operatorname{sen}A}{a}=\frac{\operatorname{sen}B}{b}=\frac{\operatorname{sen}C}{c}. \tag{4.8}$$

Ley de Cosenos. En cualquier triángulo se cumple

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, \tag{4.9}$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B, \tag{4.10}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C. \tag{4.11}$$

Fórmula de Herón. El área $A_\triangle$ de un triángulo cualquiera es

$$A_\triangle=\sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{4.12}$$

Donde $s=(a+b+c)/2$ es el **semiperímetro** del triángulo.

Ejercicio Resuelto 4.6. Un poste telefónico forma una ángulo de 82° con el piso. El ángulo de elevación del Sol es de 76°. Encuentre la longitud del poste del teléfono si su sombra es de 3.5 metros.

Solución. Lo primero que haremos es una representación del problema, figura 4.5.

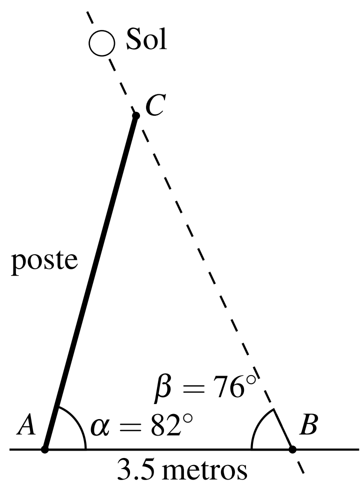


Figura 4.5: Bosquejo del poste inclinado.

Al conocer dos ángulos en el triángulo, podemos calcular el ángulo en C, entonces $\angle C = 180° - (82° + 76°) = 22°$; ahora lo más recomendable es usar la *ley de senos* —*ley de cosenos* se utiliza al conocer dos lados del triángulo— entonces al denotar con p la longitud del poste

$$\frac{\operatorname{sen} 22°}{3.5} = \frac{\operatorname{sen} 76°}{p},$$

al despejar y reducir $p = 3.5 \operatorname{sen} 76° / \operatorname{sen} 22° \approx 3.5(0.9703)/(0.3746) \approx 9.07$ metros. $\diamond$

4.9. Identidades trigonométricas

Una **identidad trigonométrica** es una *identidad* que contiene funciones trigonométricas, ver LECCIÓN 1.

Identidades trigonométricas fundamentales

Además de las *identidades recíprocas* y *pitagóricas* dadas en la página 50, tenemos las siguientes

Identidades pares-impares

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x; \qquad \cos(-x) = \cos x; \qquad \tan(-x) = -\tan x.$$

Identidades de cofunciones

$$\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}-u\right)=\cos u; \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2}-u\right)=\cot u; \qquad \sec\left(\tfrac{\pi}{2}-u\right)=\csc u;$$
$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-u\right)=\operatorname{sen} u; \qquad \cot\left(\tfrac{\pi}{2}-u\right)=\tan u; \qquad \csc\left(\tfrac{\pi}{2}-u\right)=\sec u.$$

Fórmula de adición y sustracción

Fórmulas para el seno

$$\operatorname{sen}(s+t)=\operatorname{sen} s\cos t+\cos s\operatorname{sen} t; \qquad \operatorname{sen}(s-t)=\operatorname{sen} s\cos t-\cos s\operatorname{sen} t.$$

Fórmulas para el coseno

$$\cos(s+t)=\cos s\cos t-\operatorname{sen} s\operatorname{sen} t; \qquad \cos(s-t)=\cos s\cos t+\operatorname{sen} s\operatorname{sen} t.$$

Fórmulas para la tangente

$$\tan(s+t)=\frac{\tan s+\tan t}{1-\tan s\tan t}; \qquad \tan(s-t)=\frac{\tan s-\tan t}{1+\tan s\tan t}.$$

Sumas de senos y cosenos Si A y B son números reales, entonces

$$A\operatorname{sen} x+B\cos x=k\operatorname{sen}(x+\phi)$$

en donde $k=\sqrt{A^2+B^2}$ y ϕ es tal que

$$\cos\phi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\phi=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Fórmulas para el ángulo doble

Fórmula para el seno

$$\operatorname{sen} 2x=2\operatorname{sen} x\cos x.$$

Fórmulas para el coseno

$$\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=1-2\operatorname{sen}^2 x=2\cos^2 x-1.$$

Fórmula para la tangente

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

Reducción de potencias

$$\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}; \qquad \tan^2 x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}.$$

Mitad de ángulo o semiángulo

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}};\qquad \cos\frac{u}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}};\qquad \tan\frac{u}{2}=\frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u}=\frac{\operatorname{sen} u}{1+\cos u}.$$

Fórmulas del producto a suma

$$\operatorname{sen} u\cos v=\frac{1}{2}\big[\operatorname{sen}(u+v)+\operatorname{sen}(u-v)\big],\quad \cos u\cos v=\frac{1}{2}\big[\cos(u+v)+\cos(u-v)\big],$$
$$\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v=\frac{1}{2}\big[\cos(u-v)-\cos(u+v)\big].$$

Fórmulas de la suma a producto

$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\qquad \operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y=2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2};$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\qquad \cos x-\cos y=-2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}.$$

Ejercicio Resuelto 4.7. Verifique la igualdad

$$\frac{\tan x-\cot x}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}=\sec^2 x-\csc^2 x.$$

Solución. Procedemos a desarrollar el lado izquierdo de la igualdad, para llegar a la expresión de la derecha.

$$\frac{\tan x-\cot x}{\operatorname{sen} x\cos x}=\frac{\operatorname{sen} x/\cos x-\cos x/\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x\cos x}$$

al multiplicar el numerador y denominador por $\operatorname{sen} x\cos x$

$$\begin{aligned}\frac{\tan x-\cot x}{\operatorname{sen} x\cos x}&=\frac{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}\\&=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\\&=\sec^2 x-\csc^2 x.\end{aligned}$$

◇

Ejercicio Resuelto 4.8. Verifique la igualdad

$$\frac{(\sec^2 x+\tan^2 x)^2}{\sec^4 x-\tan^4 x}=\sec^2 x+\tan^2 x.$$

Solución. Procedemos a desarrollar el lado izquierdo de la igualdad, para llegar a la expresión de la derecha (no siempre es de esta manera).

$$\begin{aligned}\frac{(\sec^2 x+\tan^2 x)^2}{\sec^4 x-\tan^4 x}&=\frac{(\sec^2 x+\tan^2 x)^2}{(\sec^2 x+\tan^2 x)(\sec^2 x-\tan^2 x)}\\&=\frac{\sec^2 x+\tan^2 x}{\sec^2 x-\tan^2 x}\\&=\frac{\sec^2 x+\tan^2 x}{1}.\end{aligned}$$

◇

4.10. Funciones trigonométricas inversas

Antes de seguir, es necesario hacer un repaso de la LECCIÓN 2 para refrescar el concepto de *función uno a uno* y *función inversa*.

En el caso de las funciones trigonométricas, también se pueden encontrar sus inversas bajo ciertas condiciones específicas, ya que al ser períodicas no son funciones uno a uno. Esto lo arreglaremos al reducir el dominio de cada una de ellas a un intervalo de longitud el período correspondiente.

Función inversa del seno o arco seno

Es la función sen^{-1}, también denotada con $\operatorname{arc\,sen}$, con dominio $[-1,1]$, rango $[-\pi/2,\pi/2]$ y es tal que

$$\operatorname{sen}^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} y = x.$$

Para la misma, se cumple

- $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x$, para $-1 \leq x \leq 1$.
- $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x$, para $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

Función inversa del coseno o arco coseno

Es la función $\cos^{-1}$, también denotada con $\operatorname{arc\,cos}$, con dominio $[-1,1]$, rango $[0,\pi]$ y es tal que

$$\cos^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x.$$

Para la misma, se cumple

- $\cos(\cos^{-1} x) = x$, para $-1 \leq x \leq 1$.
- $\cos^{-1}(\cos x) = x$, para $0 \leq x \leq \pi$.

Función inversa de la tangente o arco tangente

Es la función $\tan^{-1}$, también denotada con $\arctan$, con dominio $\mathbb{R}$, rango $[-\pi/2,\pi/2]$ y es tal que

$$\tan^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x.$$

Para la misma, se cumple

- $\tan(\tan^{-1} x) = x$, para $x \in \mathbb{R}$.
- $\tan^{-1}(\tan x) = x$, para $-\pi/2 < x < \pi/2$.

4.11. Ecuaciones trigonométricas

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación que contiene funciones trigonométricas. Para su resolución se aplican las reglas del álgebra para aislar la función trigonométrica de un lado del signo igual, luego de aplicar los conocimientos adquiridos anteriormente se despeja la variable de interés.

Ejercicio Resuelto 4.9. Encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica $\operatorname{sen}\theta + \sqrt{\operatorname{sen}\theta} = 0$, si θ es un ángulo medido en grados.

Solución. Hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{\operatorname{sen}\theta}$, de donde $u^2 = \operatorname{sen}\theta$, al sustituir tenemos la ecuación algebraica $u^2 + u = 0$, cuyas raíces son $u = 0$ y $u = -1$, es decir $\sqrt{\operatorname{sen}\theta} = 0$ y $\sqrt{\operatorname{sen}\theta} = -1$.

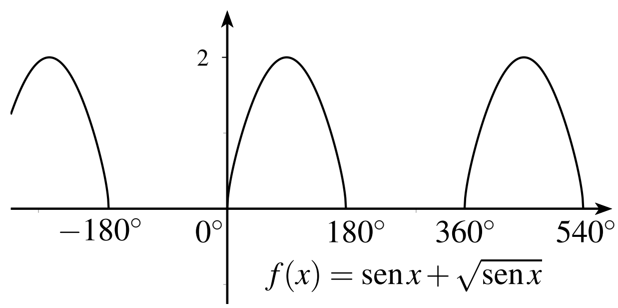


Figura 4.6: Gráfica de la ecuación como una función de x.

La primer ecuación tiene soluciones $\theta = 180°n$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; la segunda ecuación no tiene solución pues se pide la raíz positiva de $\operatorname{sen}\theta$ la cual debe ser igual a -1, *algo imposible*. $\diamond$

Ejercicio Resuelto 4.10. Encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica $\cos 2x + \cos^2 x = 1$, si x es un número real.

Solución. Como $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, tenemos que el período T de las posibles soluciones es $T = 2\pi/2 = \pi$. Entonces en forma sucesiva

$$\begin{aligned}
(2\cos^2 x - 1) + \cos^2 x &= 1,\\
3\cos^2 x &= 2,\\
\cos^2 x &= \frac{2}{3},\\
\cos x &= \pm\sqrt{\frac{2}{3}},\\
x &= \cos^{-1} \pm\sqrt{\frac{2}{3}},
\end{aligned}$$

es decir $x_1 \approx 0.61548$ y $x_2 \approx 2.52611$, entonces las soluciones son $x = x_1 + \pi n$ y $x = x_2 + \pi n$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ver figura 4.7. $\diamond$

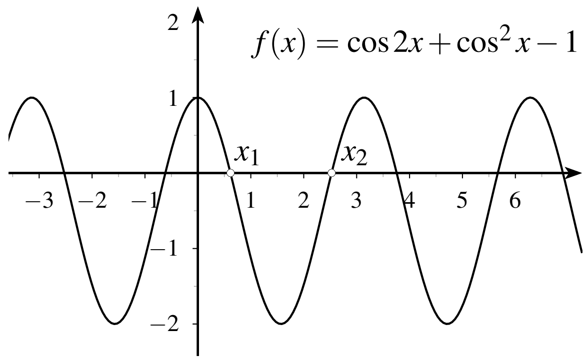


Figura 4.7: Comportamiento periódico.

4.12. Problemas propuestos

Problema Propuesto 4.1. Responder las siguientes preguntas.

- ¿Qué funciones trigonométricas, sus gráficas no tienen intersecciones con el eje y?
- ¿Qué funciones trigonométricas, sus gráficas no tienen intersecciones con el eje x?

Problema Propuesto 4.2. El desplazamiento desde el equilibrio de una masa oscilante unida a un resorte es $y(t) = 4\cos 3\pi t$, donde y se mide en pulgadas y t en segundos. Describa su comportamiento.

Problema Propuesto 4.3. Como se muestra en la figura 4.8, dos estaciones de remolque S_1 y S_2 ven un globo meteorológico con ángulos de elevación α y β, respectivamente. Verifique que la altura h a la que está el globo es

$$h = \frac{c}{\cot\alpha + \cot\beta},$$

donde c es la distancia entre las dos estaciones.

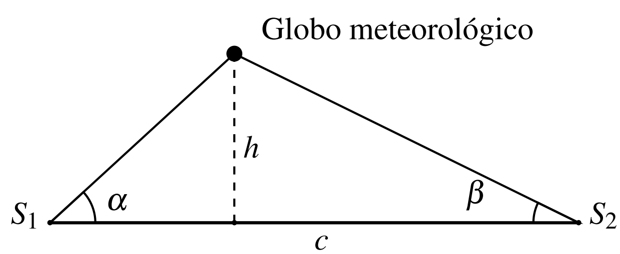


Figura 4.8: Representación esquemática.

Problema Propuesto 4.4. Un *brazo robot* de dos dimensiones sabe donde se encuentra, guiado por el rastro de un *ángulo hombro* α y de un *ángulo codo* β. Este brazo tiene un punto fijo de rotación en su origen. El ángulo del hombro se mide en dirección contraria a las manecillas del reloj del eje x, y el ángulo del codo se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj desde la parte posterior del brazo hasta la parte inferior. Suponiendo que las partes posterior e inferior del brazo miden 2 y que el ángulo del codo β está diseñado contra una hiper-extensión a más allá de 180°. Encuentre los ángulos α y β que colocarían la mano del robot en el punto $(1,2)$.

Problema Propuesto 4.5. Se quiere medir un terreno plano de forma triangular, encontrándose que la longitud de uno de los lados es de 420 metros, mientras que un lado consecutivo a este mide 350 metros, de tal forma que estos lados forman un ángulo de 25°. El tercer lado es imposible medirlo directamente, pues existe una estructura que lo impide.

1. Calcule la longitud del tercer lado indirectamente.
2. Determine los otros dos ángulos internos del triángulo.

Problema Propuesto 4.6. Verifique la siguiente igualdad

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=2\csc\theta.$$

Problema Propuesto 4.7. En ciertas condiciones, la ecuación del movimiento de una cuerda en vibración, estirada entre dos puntos sobre el eje x es

$$y=A\operatorname{sen}(wt-kx)-A\operatorname{sen}(wt+kx).$$

En donde t es el tiempo, A, w y k son constantes. Verificar que y tiene la forma equivalente

$$y=-2A\cos wt\operatorname{sen}kx.$$

Problema Propuesto 4.8. Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones trigonométricas

1. $2\cos^2 x=1+\operatorname{sen}x$, si x está en el intervalo $[0,2\pi]$.
2. $1-\operatorname{sen}x=\sqrt{3}\cos x$, si x está en el intervalo $[0,2\pi]$. ¿En grados sexagesimales, cuáles son las soluciones en el intervalo $[0^\circ,360^\circ]$?

Bibliografía

[1] Stewart, J. y otros. *Precálculo — Matemáticas para el cálculo.* 5.ª edición. México: Editorial Thomson, 2007.

[2] Swokowski, E.W. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* 2.ª edición. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1988.

[3] Anfossi, A. *Curso de Trigonometría Rectilínea.* México: PROGRESO, 1967.

[4] Zill, D. y otros. *Algebra y Trigonometría.* 2.ª edición. México: McGraw-Hill, 1992.

[5] Hohenwarter, M. Documento de ayuda de GeoGebra — Manual Oficial de la Versión 3.2. Traducción de Liliana Saidon (Centro Babbage), www.geogebra.org (mayo de 2010).

Pruebas de Selección 2010

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemática Aplicada

Segundo Examen de Selección, Primera Etapa

OLIMPIADA MATEMÁTICA DE CENTROAMÉRICA Y DEL CARIBE

OMCC 2010, Mayagüez, Puerto Rico

Instrucciones: *Resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento. No deje algo al azar, explique todos sus razonamientos de forma* clara *y* concisa. *No se permite el uso de* calculadora.

Problema 1.
Sean J_1 y J_2 dos circunferencias del mismo diámetro, secantes en A y B. Sea C un punto cualquiera de J_1. Demuestre que el ortocentro del triángulo ABC está sobre J_2.

Problema 2.
Decimos que un polinomio con coeficientes reales es **alternante** si se cumplen las siguientes condiciones:

PA1. Todos los coeficientes de los términos impares tienen el mismo signo.

PA2. Todos los coeficientes de los términos pares tienen el mismo signo.

PA3. Un coeficiente de término par y un coeficiente de término impar, cualesquiera, tienen distinto signo.

Demostrar que:

1. El producto de dos polinomios alternantes es alternante.
2. Que cualquier factor, con coeficientes reales, de un polinomio alternante con raíces reales es alternante.
3. ¿Es cierto, en general, que cualquier factor, con coeficientes reales, de un polinomio alternante es alternante?

El examen tiene una duración de 4 horas y 30 minutos.
Sólo se resolverán dudas respecto a los enunciados.

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemática Aplicada

Primer Examen de Selección, Primera Etapa

OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

OIM 2010, Asunción, Paraguay

Instrucciones: *Resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento. No deje algo al azar, explique todos sus razonamientos de forma* clara *y* concisa*. No se permite el uso de* calculadora*.*

Problema 1.
Determine todos los naturales n y reales a, b para los cuales el número 1 es una raíz del polinomio $x^n - ax^{n-1} + bx - 1$, con multiplicidad mayor o igual que dos.

Problema 2.
Se marcan 2010 puntos en el interior de un triángulo equilátero de lado 100. Demuestre que existen tres puntos entre los elegidos que pueden ser cubiertos por un disco de radio 2.

Problema 3.
Sea BC un segmento fijo y sea S una circuferencia cualquiera, en la cual BC es cuerda. Sea A un punto variable a lo largo de S (distinto de B y C). Sean I_B e I_C los excentros del triángulo ABC que se encuentran sobres las bisectrices internas de B y C respectivamente. Demuestre que al variar A a lo largo de S, el punto medio del segmento I_BI_C permanece constante.

El examen tiene una duración de 4 horas y 30 minutos.
Sólo se resolverán dudas respecto a los enunciados.

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemática Aplicada

Segundo Examen de Selección, Primera Etapa

OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
OIM 2010, Asunción, Paraguay

Instrucciones: *Resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento. No deje algo al azar, explique todos sus razonamientos de forma* clara *y* concisa*. No se permite el uso de* calculadora*.*

Problema 1.
Un profesor propone a sus estudiantes el siguiente problema: *Considere una circunferencia de centro O, tangente a los lados AB y AC, del triángulo ABC, en los puntos F y E respectivamente. Sean E' y F' las intersecciones respectivas entre las rectas EO y AB, y FO y AC. Determinar bajo que condiciones es verdadera la proposición: si $F'C = E'B$ entonces el triángulo ABC es isósceles.* Las respuestas de cuatro alumnos son:

Andrés: La proposición es verdadera si F' y E' están en el interior de los lados del triángulo.

Betty: La proposición es falsa si y sólo si el segmento $F'E$ intersecta al segmento BC.

Carlos: La proposición es verdadera si $F'E'$ no intersecta al segmento BC.

Diana: La proposición es verdadera si B está entre F' y A, y C está entre E' y A.

Demuestre que lo Andrés y Diana afirman es verdadero y determine si Betty y Carlos está en lo correcto o no.

Problema 2.
Un grupo de n amigos decide ir a un parque de diversiones. Cuándo llegan descubren que son las únicas personas en el parque, y que todos los juegos están diseñados para exactamente tres personas a la vez. Deciden que cada pareja de personas se van a subir juntas a algún juego exactamente una vez. Rápidamente se dan cuenta de que no cualquier cantidad de personas puede ir a este parque en estas condiciones. Demuestre que si tal grupo de amigos pudo realizar sus deseos ese día, sin que otra persona fuera del grupo subiese a los juegos, entonces $n^2 - n$ es divisible entre 6. Determine si es posible que siete amigos disfruten del parque bajo las condiciones pedidas, y en caso de ser posible diga como pueden subirse a los juegos.

Problema 3.
Para cada entero positivo n, sea $\varphi(n)$ la cantidad de enteros positivos menores o iguales que n y primos relativos con n, y sea $\tau(n)$ la cantidad de divisores enteros positivos de n. Determine todos los enteros positivos n tales que $|\varphi(n) + \tau(n) - n| \leq 1$.

El examen tiene una duración de 4 horas y 30 minutos.
Sólo se resolverán dudas respecto a los enunciados.

Pruebas de Selección 2011

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemática Aplicada

Primer Examen de Selección, Primera Etapa

OLIMPIADA MATEMÁTICA DE CENTROAMÉRICA Y DEL CARIBE

OMCC 2011, Colima, México

Instrucciones: *Resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento. No deje algo al azar, explique todos sus razonamientos de forma* clara *y* concisa*. No se permite el uso de* calculadora*.*

Problema 1.
Usando cada uno de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 exactamente una vez, forme dos números de tres cifras de modo que la diferencia (positiva) entre ellos sea lo menor posible.

Problema 2.
En una hoja de papel rectangular de 12 cm de alto y 9 cm de ancho se ha trazado un segmento con sus extremos en bordes opuestos de la hoja. Si se dobla la hoja a lo largo del segmento, un par de vértices opuestos quedan en el mismo lugar. Averigüe cuanto mide el segmento trazado sin usar instrumentos de medición.

Problema 3.
Hay 16 gomitas dulces en una mesa y dos niños comienzan a comerlas por turnos. En cada turno, cada niño debe comer por lo menos una gomita y no puede comer más de la mitad de las gomitas que quedan en la mesa. Deciden que en este juego culinario **gana** el niño que deje sólo una gomita en la mesa.

1. ¿Cuál de los dos niños puede ganar siempre, sin importar lo que haga el otro? ¿Qué debe hacer este niño para ganar?

2. Responda al inciso anterior si en lugar de 16, al inicio del juego hay 2, 4, 8, o en general $2k$ gomitas en la mesa (k representa un entero positivo).

Problema 4.
Demuestre la igualdad

$$2(1005^2-1004^2)\cdot 2(1004^2-1003^2)\cdots 2(3^2-2^2)\cdot 2(2^2-1^2)=\frac{2010!}{2\cdot 1005!}.$$

El examen tiene una duración de 4 horas y 30 minutos.
Sólo se resolverán dudas respecto a los enunciados.

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemática Aplicada

Primer Examen de Selección, Segunda Etapa

OLIMPIADA MATEMÁTICA DE CENTROAMÉRICA Y DEL CARIBE
OMCC 2011, Colima, México

Instrucciones: *Resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento. No deje algo al azar, explique todos sus razonamientos de forma* clara *y* concisa*. No se permite el uso de* calculadora*.*

Problema 5.
En el año 2013 la humanidad decide comenzar una nueva era de paz y prosperidad. Se escogen a 1000 de las mejores personas que habitan la Tierra, a cada una se le encargará una labor primordial. En cada país se pondrá a la misma cantidad de personas (de entre éstas 1000) para que comuniquen y hagan valer el nuevo objetivo. Si sobrase alguna persona, se le dará un puesto en la nueva ONU llamada OPT (*Organización del Planeta Tierra*), sin embargo sólo se tienen nueve puestos disponibles en la OPT. ¿Qué cantidad de países podría haber en ese entonces, si sabe que cada una de esas 1000 personas ejemplares tienen un puesto en algún país o en la OPT? Dé todas las posibilidades.

Problema 6.
Sobre el lado BC de un cuadrado $ABCD$ se dibuja un triángulo equilátero OBC con el punto O dentro del cuadrado. ¿Cuánto mide el ángulo OAC?

Problema 7.
Se hace un listado de todos los números de 5 cifras que se obtienen con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5. Hallar que número ocupa la posición 100 del listado si

1. Los números están ordenados en forma ascendente.
2. No se repiten dígitos y los números están ordenados en forma descendente.

Problema 8.
Si x es un número fraccionario, llamaremos $\lfloor x \rfloor$ a su parte entera cuando se escribe como una fracción mixta. Considere la siguiente sucesión: el primer término x_1 es 1, los siguientes términos se obtienen con la fórmula

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{\lfloor x_{n-1} \rfloor},$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$. De este modo la sucesión inicia con 1, 2, $\frac{5}{2}$, 3, …, ¿cuál es el término x_{2011} en la sucesión?

El examen tiene una duración de 4 horas y 30 minutos.
Sólo se resolverán dudas respecto a los enunciados.

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemática Aplicada

Segundo Examen de Selección, Primera Etapa

OLIMPIADA MATEMÁTICA DE CENTROAMÉRICA Y DEL CARIBE

OMCC 2011, Colima, México

Instrucciones: *Resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento. No deje algo al azar, explique todos sus razonamientos de forma* clara *y* concisa. *No se permite el uso de* calculadora.

Problema 1.
Se hace una lista de 2011 dígitos de acuerdo con la siguiente regla: los primeros dígitos son 8 y 6, y a partir del tercer dígito, cada nuevo dígito que se escribe es el dígito de las unidades de la suma de los dos últimos dígitos escritos. La lista comienza con $86404\ldots$, porque $8+6=14$, $6+4=10$, $4+0=4$, $\ldots$. Hallar los últimos tres dígitos de la lista.

Problema 2.

2.1. En cierta academia sabatina los alumnos están divididos en dos niveles, el primero con 30 alumnos, y el segundo con 10 alumnos. En el primer examen de selección, el promedio del primer nivel fue de 15 puntos, en tanto que el promedio del segundo nivel fue de 25 puntos. ¿Cuál sería el promedio de las notas de ambos niveles?

2.2. Los números a, b son enteros positivos, y cumplen la siguiente igualdad

$$a^2+b^2+a+b+2ab=20.$$

Hallar el valor de $a+b$.

Problema 3.
Sea ABC un triángulo con el ángulo en el vértice B mayor que 90 grados. Se consideran puntos P y Q sobre el lado AC tales que $AP=PQ=QC$. La paralela a BQ trazada por P corta al lado AB en el punto R. Hallar el área del triángulo ARQ sabiendo que el área del triángulo ABC es 267.

El examen tiene una duración de 4 horas y 30 minutos.
Sólo se resolverán dudas respecto a los enunciados.

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemática Aplicada

Segundo Examen de Selección, Segunda Etapa

OLIMPIADA MATEMÁTICA DE CENTROAMÉRICA Y DEL CARIBE

OMCC 2011, Colima, México

Instrucciones: *Resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento. No deje algo al azar, explique todos sus razonamientos de forma* clara *y* concisa*. No se permite el uso de* calculadora*.*

Problema 4.

4.1. Los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se usan para formar tres números de tres dígitos cada uno, usando cada uno de los nueve dígitos exactamente una vez. ¿Se puede lograr que ninguno de los tres números sea múltiplo de 3?

4.2. Con los dígitos 1, 2, 4, 5, 7, 8 se forman tres números de dos dígitos cada uno, usando cada uno de los seis dígitos exactamente una vez. ¿Se puede lograr que ninguno de los tres números sea múltiplo de 3?

Problema 5.
Del conjunto de 24 números: 1, 2, 3, $\ldots$, 23, 24, se debe tachar la menor cantidad posible de números de modo tal que al multiplicar todos los que queden sin tachar se obtenga un cubo perfecto. Determinar cuáles son los números que se debe tachar.

Problema 6.
Sean a y b enteros tales que el polinomio $x^2+ax+b+1$ tiene raíces enteras no nulas. Demuestre que a^2+b^2 es un número compuesto.

El examen tiene una duración de 4 horas y 30 minutos.
Sólo se resolverán dudas respecto a los enunciados.

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemática Aplicada

Primer Examen de Selección, Primera Etapa

OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

OIM 2011, San José, Costa Rica

Instrucciones: *Resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento. No deje algo al azar, explique todos sus razonamientos de forma* clara *y* concisa*. No se permite el uso de* calculadora*.*

Problema 1.
Sean a y b enteros tales que el polinomio $x^2+ax+b+1$ tiene raíces enteras no nulas, demuestre que a^2+b^2 es compuesto.

Problema 2.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con ángulos $\angle A = \angle B = 96^\circ$, $\angle C = 78^\circ$, $\angle D = 90^\circ$ y se cumple que $AB = 2AD$. Encontrar el valor de $\angle CAD$ y demuéstrelo.

Problema 3.
Se tiene una montón con 100 piedras. Una partición del montón en k montoncitos es **buena** ssi

1. Los montoncitos tiene cantidades distintas de piedras.
2. Si agarramos cualquiera de los k montoncitos y lo partimos en dos montoncititos, entre las $k-1$ pilas de piedras restantes hay dos que tienen la misma cantidad de piedras.

Determine el valor *máximo* y *mínimo* que puede tener k de modo que exista una buena partición de nuestro montón de piedras.

El examen tiene una duración de 4 horas y 30 minutos.
Sólo se resolverán dudas respecto a los enunciados.

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemática Aplicada

Segundo Examen de Selección, Primera Etapa

OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

OIM 2011, San José, Costa Rica

Instrucciones: *Resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento. No deje algo al azar, explique todos sus razonamientos de forma* clara *y* concisa*. No se permite el uso de* calculadora*.*

Problema 1.
El número n es un entero positivo con 2011 dígitos, 31 de ellos son cero. Los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 aparecen en proporción 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 respectivamente. Demostrar que n no es un cuadrado perfecto.

Problema 2.
Sean a, b, c reales positivos dados. Hallar todos los valores reales de x que cumplen

$$\sqrt{a+bx}+\sqrt{b+cx}+\sqrt{c+ax}=\sqrt{a-bx}+\sqrt{b-cx}+\sqrt{c-ax}.$$

Nota: El valor de x debe ser tal que las seis raíces sean reales.

Problema 3.
Hallar todos los pares de enteros (x,y) que cumplen la ecuación

$$x^3-x^2+2xy^2-2x^2y+y^2-y^3=0.$$

Problema 4.
Considere un conjunto finito A de puntos en el plano euclidiano, tal que no hay ningún trío colineal de puntos que pertenezcan a A. Decimos que A es "CIM" si existe una manera de colorear los vértices de forma que se cumplan los siguientes criterios:

1. Ningún trío de puntos de A que están coloreados del mismo color forma un triángulo obtusángulo.

2. Ningún trío de puntos de A que están coloreados cada uno de un color distinto al de los otros dos forma un triángulo obtusángulo.

Determinar todos los posibles valores enteros positivos de n tales que existe un conjunto "CIM" con n puntos.
Nota: Para hacer los coloreos se dispone de una cantidad ilimitada de colores.

El examen tiene una duración de 4 horas y 30 minutos.
Sólo se resolverán dudas respecto a los enunciados.

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemática Aplicada

Segundo Examen de Selección, Segunda Etapa

OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
OIM 2011, San José, Costa Rica

Instrucciones: *Resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento. No deje algo al azar, explique todos sus razonamientos de forma* clara *y* concisa. *No se permite el uso de* calculadora.

Problema 5.
Mostrar que existe un numero de la forma

$$1234567891234\ldots123456789$$

que es divisible por 987654321.

Problema 6.
En un triángulo ABC, con

$$BC = CA + \frac{1}{2}AB.$$

Sea P un punto en el lado AB tal que $BP : PA = 1 : 3$. Probar que $\angle CAP = 2\angle CPA$.

Problema 7.
Determinar si existen doce progresiones geométricas, de razón no necesariamente entera, tales que cada número del 1 al 100 se encuentra en al menos una de las progresiones.

El examen tiene una duración de 4 horas y 30 minutos.
Sólo se resolverán dudas respecto a los enunciados.

PRUEBAS INTERNACIONALES 2011

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

PRIMER DÍA

Colima, México, 21 de junio del 2011

Instrucciones: *Resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento. No deje algo al azar, explique todos sus razonamientos de forma* clara *y* concisa*. No se permite el uso de* calculadora*.*

Problema 1.
En cada uno de los vértices de un cubo hay una mosca. Al sonar un silbato, cada una de las moscas vuela a alguno de los vértices del cubo situado en una misma cara que el vértice de donde partió, pero diagonalmente opuesto a éste. Al sonar el silbato, ¿de cuántas maneras pueden volar las moscas de modo que en ningún vértice queden dos o más moscas?

Problema 2.
Sean ABC un triángulo escaleno, D el pie de la altura desde A, E la intersección del lado AC con la bisectriz del $\angle ABC$, y F un punto sobre el lado AB. Sea O el circuncentro del triángulo ABC y sean X, Y, Z los puntos donde se cortan las rectas AD con BE, BE con CF, CF con AD, respectivamente. Si XYZ es un triángulo equilátero, demuestra que uno de los triángulos OXY, OYZ, OZX es un triángulo equilátero.

Problema 3.
Aplicar un desliz a un entero $n \geq 2$ significa tomar cualquier primo p que divida a n y reemplazar n por $\frac{n+p^2}{p}$. Se comienza con un entero cualquiera mayor o igual a 5 y se le aplica un desliz. Al número así obtenido se le aplica un desliz, y así sucesivamente se siguen aplicando deslices. Demuestra que sin importar los deslices aplicados, en algún momento se obtiene el número 5.

Duración: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema tiene un valor de 7 puntos.

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

SEGUNDO DÍA

Colima, México, 22 de junio del 2011

Instrucciones: *Resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento. No deje algo al azar, explique todos sus razonamientos de forma* clara *y* concisa*. No se permite el uso de* calculadora*.*

Problema 4.
Encuentra todos los enteros positivos p, q y r, con p y q números primos, que satisfacen la igualdad

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}-\frac{1}{(p+1)(q+1)}=\frac{1}{r}.$$

Problema 5.
Los números reales positivos x, y, z son tales que,

$$x+\frac{y}{z}=y+\frac{z}{x}=z+\frac{x}{y}=2.$$

Determina todos los posibles valores para $x+y+z$.

Problema 6.
Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente. Sean Y y Z los pies de las perpendiculares desde B y C sobre FD y DE, respectivamente. Sea F_1 la reflexión de F con respecto a E y sea E_1 la reflexión de E con respecto a F. Si $3EF = FD+DE$, demuestra que $\angle BZF_1 = \angle CYE_1$.
Nota: La reflexión de un punto P respecto a un punto Q es el punto P_1 ubicado sobre la recta PQ tal que Q queda entre P y P_1, y $PQ = QP_1$.

Duración: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema tiene un valor de 7 puntos.

Olimpiada Iberoamericana de Matemática

PRIMER DÍA

San José, Costa Rica, 27 de septiembre del 2011

Instrucciones: *Resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento. No deje algo al azar, explique todos sus razonamientos de forma* clara *y* concisa*. No se permite el uso de* calculadora*.*

Problema 1.
En la pizarra está escrito el número 2. Ana y Bruno juegan alternativamente, comenzando Ana. Cada uno en su turno sustituye el número escrito por el que se obtiene al aplicar exactamente una de las siguientes operaciones: multiplicarlo por 2, multiplicarlo por 3, o sumarle 1. El primero que obtenga un resultado mayor o igual que 2011 gana. Hallar cuál de los dos tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

Problema 2.
Encontrar todos los enteros positivos n para los cuales existen tres números enteros no nulos x, y, z tales que

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{n}.$$

Problema 3.
Sea ABC un triángulo y sean X, Y, Z los puntos de tangencia de su circunferencia inscrita con los lados BC, CA, AB, respectivamente. Suponga que C_1, C_2, C_3 son circunferencias con cuerdas YZ, ZX, XY, respectivamente, tales que C_1 y C_2 se corten sobre la recta CZ y que C_1 y C_3 se corten sobre la recta BY. Suponga que C_1 corta a las cuerdas XY y ZX en J y M, respectivamente; que C_2 corta a las cuerdas YZ y XY en L e I, respectivamente; y que C_3 corta a las cuerdas YZ y ZX en K y N, respectivamente. Demostrar que I, J, K, L, M, N están sobre la misma circunferencia.

Duración: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema tiene un valor de 7 puntos.

Olimpiada Iberoamericana de Matemática

SEGUNDO DÍA

San José, Costa Rica, 28 de septiembre del 2011

Instrucciones: *Resuelva los siguientes problemas, dejando constancia de todo su procedimiento. No deje algo al azar, explique todos sus razonamientos de forma* clara *y* concisa*. No se permite el uso de* calculadora*.*

Problema 4.
Sea ABC un triángulo acutángulo, $AC \neq BC$, y sea O su circuncentro. Sean P y Q puntos tales que $BOAP$ y $COPQ$ son paralelogramos. Demostrar que Q es el ortocentro de ABC.

Problema 5.
Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales positivos. Demostrar que existen $a_1, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ tales que

$$a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2 \geq (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)^2.$$

Problema 6.
Sean k y n enteros positivos, con $k \geq 2$. En una línea recta se tienen kn piedras de k colores diferentes de tal forma que hay n piedras de cada color. Un *paso* consiste en intercambiar de posición dos piedras adyacentes. Encontrar el menor entero positivo m tal que siempre es posible lograr, con a lo sumo m pasos, que las n piedras de cada color queden seguidas si:

a) n es par.

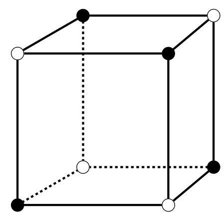
b) n es impar y $k = 3$.

Duración: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema tiene un valor de 7 puntos.

1. Soluciones de la OMCC

1.1. Solución al problema 1

La solución es 81. Separemos los 8 vértices del cubo en dos conjuntos A y B, representados por círculos blancos y negros en el dibujo, respectivamente.



El conjunto A tiene la propiedad de que si una mosca está originalmente en un vértice de A al volar cae necesariamente en otro vértice de A. Lo mismo sucede con el conjunto B. Como estos conjuntos son ajenos, el número buscado se obtiene al multiplicar el número de formas en que las moscas de A pueden volar y el número de formas en las que las moscas de B pueden volar.

Como todas las moscas de A se mueven y no coinciden en el mismo vértice, tenemos que el número de formas en que las moscas pueden volar cumpliendo las condiciones del problema es D_4, el número de permutaciones de 4 elementos sin ningún punto fijo. Es claro que lo mismo sucede con las moscas de B, así que la respuesta es D_4^2.

Notemos que $D_4 = 9$ (esto se puede calcular fácilmente notando que estas permutaciones son 4-ciclos o bien producto de dos trasposiciones, así que hay $P(3;3)+C(4;2)/2 = 6+3 = 9$ de ellas) y por tanto la solución es $9^2 = 81$.

Nota. El número D_4 puede encontrarse de otras maneras, veamos tres:

(a) Se pueden listar las 24 permutaciones y después identificar las que no tienen puntos fijos.

(b) Contemos a las permutaciones de $(1,2,3,4)$ que fijan algún punto. Sean

$$A_i = \{\text{permutaciones de } (1,2,3,4) \text{ que fijan a } i\}, \text{ con } i = 1,2,3,4.$$

Encontraremos $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$, donde $|C|$ representa el número de elementos en C.

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= \binom{4}{1}3! - \binom{4}{2}2! + \binom{4}{3}1! - \binom{4}{4}0! = 15. \end{aligned}$$

Por lo que permutaciones sin puntos fijos hay $D_4 = 4! - 15 = 9$.

(c) Contemos las permutaciones que si tienen puntos fijos. Las que tienen un punto fijo determinado que son $\binom{4}{1}3!$ que corresponde a elegir de entre los 4 puntos el punto fijo determinado y luego permutar los restantes, luego debemos de quitar las que tienen 2 puntos

fijos determinados (ya que se han contado dos veces) que son $\binom{4}{2}2!$, después sumar las que tienen 3 puntos fijos, que son $\binom{4}{3}1!$ y finalmente restar las que tienen 4 puntos fijos $\binom{4}{4}0!$, luego en total hay

$$\binom{4}{1}3!-\binom{4}{2}2!+\binom{4}{3}1!-\binom{4}{4}0!$$

permutaciones con al menos un punto fijo. Por lo que permutaciones sin puntos fijos hay

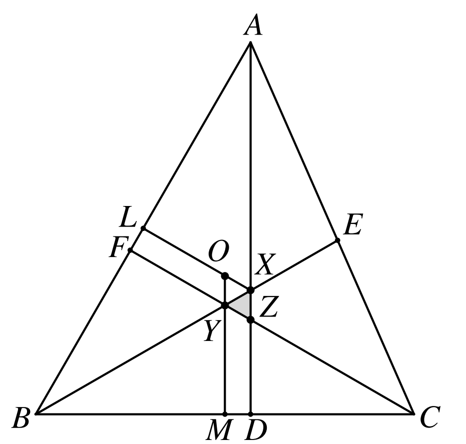
$$4!\left[\binom{4}{1}3!-\binom{4}{2}2!+\binom{4}{3}1!-\binom{4}{4}0!\right]=24-(24-12+4-1)=24-15=9.$$

1.2. Solución al problema 2

Por hipótesis el triángulo XYZ es equilátero, de donde $\angle YXZ=60^\circ$ y por tanto $\angle BXD=\angle YXZ=60^\circ$. Como D es pie de la altura por A se sigue que $\angle XDB=90^\circ$ y por tanto

$$\angle DBX=90^\circ-\angle BXD=90^\circ-60^\circ=30^\circ.$$

Como BE es la bisectriz del $\angle ABC$ entonces $\angle XBA=\angle CBY=30^\circ$. Luego en el triángulo rectángulo ABD, se tiene que $\angle ABD=60^\circ$ y entonces $\angle DAB=30^\circ$.



Sean L y M los puntos medios de AB y BC, respectivamente y O el circuncentro de ABC. Dado que $\angle XBA=30^\circ$ y $\angle XAB=\angle DAB=30^\circ$, se sigue que el triángulo AXB es isósceles con $AX=XB$. Por lo tanto la mediatriz de AB pasa por L y por X.

Análogamente por simetría (note que $\angle FYB=60^\circ$, por lo que CF es también altura), se sigue que el triángulo BYC es isósceles con $BY=YC$ y por lo tanto la mediatriz de BC pasa por M y por Y.

Finalmente, MY es paralela a AD y LX es paralela a CF. Por lo tanto $\angle XYO=\angle BYM=60^\circ$ y $\angle OXY=\angle LXB=60^\circ$. En consecuencia el triángulo XYO es equilátero.

1.3. Solución al problema 3

La demostración se hará por inducción fuerte. Denotaremos a un desliz con una flecha. El único desliz posible para el 5 es, $5 \to \frac{5+5^2}{5} = 6$.

Para 6 hay dos posibles deslices iniciales con $p = 2,3$, pero ambos deslices al 6 lo llevan a 5, ya que:

$$6 \to \frac{6+2^2}{2} = 5, \quad 6 \to \frac{6+3^2}{3} = 5.$$

Luego, $5 \to 6 \to 5$. Esto es la base de inducción.

Observemos que en general para un primo p, el único desliz posible es,

$$p \to \frac{p+p^2}{p} = p+1.$$

Supongamos que para los números enteros k con $6 \leq k < n$, hay una serie de deslices tales que en algún momento se cae en 5.

Si n es compuesto, digamos $n = pm$ con p primo, y si hacemos el desliz

$$n \to \frac{pm+p^2}{p} = m+p,$$

tenemos que este desliz lleva a n al número $m+p$.

Afirmamos que $m+p \leq n-2$. Si no es así, tenemos $m+p \geq mp-1$, luego $(p-1)(m-1) \leq 2$. Pero como $m \geq 2$ y $p \geq 2$, las únicas soluciones enteras (p,m) que tiene esta desigualdad son $(3,2)$, $(2,2)$, $(2,3)$. Pero respectivamente tendríamos que $n = 6$, $n = 4$ o $n = 6$, lo cual no es posible pues $n > k \geq 6$, además $m+p \geq 5$.

Así, si $n > 6$ es un entero compuesto, un desliz lo lleva a un número al menos dos unidades menor, pero mayor o igual a 5. Por hipótesis inductiva, a partir de aquí debe llegar a 5. Finalmente, si n es primo entonces tras un desliz se transforma en $n+1$, que no es primo.

Por el caso anterior, en el siguiente paso se transforma en un número menor o igual a $(n+1)-2 = n-1$ y mayor o igual a 5. Así, por hipótesis inductiva, a partir de aquí debe llegar a 5.

1.4. Solución al problema 4

Es claro que,

$$\frac{1}{p+q} + \frac{1}{q+1} - \frac{1}{(p+1)(q+1)} = \frac{p+q+1}{(p+1)(q+1)}.$$

La fracción $\frac{p+q+1}{(p+1)(q+1)}$ será igual a $\frac{1}{r}$ con r entero, siempre que

$$p+q+1 \mid (p+1)(q+1) \Leftrightarrow p+q+1 \mid (p+1)(q+1) - (p+q+1) \Leftrightarrow p+q+1 \mid pq.$$

Dado que los únicos divisores positivos de pq son 1, p, q, pq, y como $p+q+1$ es mayor a cada uno de 1, p, y q, deberá suceder que $p+q+1=pq$. En este caso tenemos que,

$$p+q+1=pq \Leftrightarrow pq-p-q+1=2 \Leftrightarrow (p-1)(q-1)=2.$$

Las únicas soluciones de la ecuación anterior son $(2,3)$ y $(3,2)$, y por tanto, los únicos números que cumplen las condiciones del enunciado son $p=2$, $q=3$ y $r=2$, y también $p=3$, $q=2$ y $r=2$.

1.5. Solución al problema 5

Las ecuaciones $x+\frac{y}{z}=2$, $y+\frac{z}{x}=2$, $z+\frac{x}{y}=2$ implican que

$$xy+z=2x, \quad yz+x=2y \quad zx+y=2z$$

y que

$$xyz+y^2=2yz, \quad xyz+z^2=2zx, \quad xyz+x^2=2xy.$$

Por lo que,

$$xy+yz+zx=x+y+z \tag{5.1}$$

$$3xyz+(x^2+y^2+z^2)=2(xy+yz+zx). \tag{5.2}$$

También tenemos que

$$1=\frac{y}{z}\frac{z}{x}\frac{x}{y}=(2-x)(2-y)(2-z)=8-4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-xyz. \tag{5.3}$$

Si hacemos $a=x+y+z$, tenemos por (5.1) que $xy+yz+zx=a$ y también que,

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=a^2-2a.$$

Ahora de (5.2) se tiene que, $3xyz=-a^2+4a$. Finalmente de (5.3), podemos concluir que,

$$1=8-4a+2a-\frac{-a^2+4a}{3}.$$

Lo que lleva a la ecuación, $a^2-10a+21=0$, que tiene por raíces $a=3$ y $a=7$. Por lo que $x+y+z$ es igual a 3 ó 7. Pero si $x+y+z=7$, como

$$x+\frac{y}{z}+y+\frac{z}{x}+z+\frac{x}{y}=6,$$

se tiene que

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}=-1,$$

lo que no es posible para x, y, z positivos. La suma $x+y+z=3$, se logra con $x=y=z=1$, que también son soluciones de las ecuaciones, por lo que el único valor posible de $x+y+z$ es 3.

1.6. Solución al problema 6

Como

$$\angle BZF_1 = \angle BZF + \angle FZF_1 \quad \text{y} \quad \angle CYE_1 = \angle CYE + \angle EYE_1,$$

vamos a demostrar que $\angle BZF = \angle CYE$ y que $\angle FZF_1 = \angle EYE_1$. Primero notemos que los triángulos AEF, DBF y DEC son semejantes al triángulo ABC. La semejanza de AEF con ABC se sigue de que el cuadrilátero $BCEF$ es cíclico y análogamente las otras.

Sean X, Y, Z los pies de la perpendiculares desde A, B, C sobre EF, ED, DE, respectivamente. Como los triángulos rectángulos BYF y BEC tiene un ángulo agudo igual a $\angle C$, estos triángulos son semejantes, por lo que,

$$\frac{FY}{FB} = \frac{CE}{CB}. \tag{6.1}$$

De igual manera se tiene que los triángulos rectángulos CZE y CFB son semejantes, por lo que

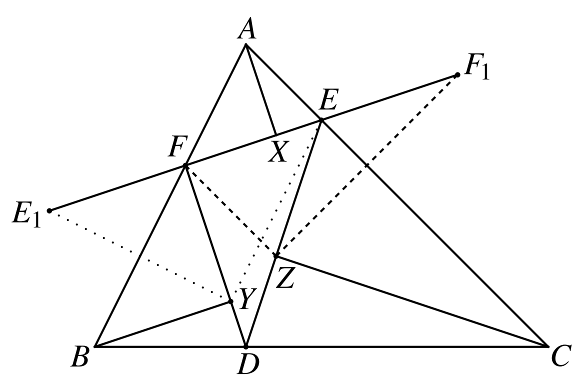
$$\frac{ZE}{FB} = \frac{CE}{CB}. \tag{6.2}$$

Por (6.1) y (6.2) se tiene que, $FY = ZE$. Análogamente se puede mostrar que, $DZ = XF$ y $EX = YD$.

Como por hipótesis $3EF = FD + DE$, se tiene que

$$3EF = FY + YD + DZ + ZE = FY + XF + EX + FY = EF + 2FY$$

de donde $FY = ZE = EF$.

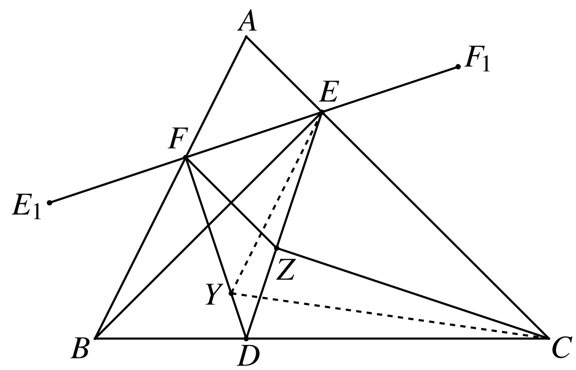


Entonces $EF = EF_1 = EZ$, por lo que el triángulo FZF_1 es un triángulo rectángulo con $\angle FZF_1 = 90°$. Análogamente, como $FE = FE_1 = FY$ se tiene que $\angle EYE_1 = 90°$. Por lo tanto, $\angle FZF_1 = \angle EYE_1$.

Por otro lado como $EF = EZ$ el triángulo EFZ es isósceles y como EB es bisectriz de $\angle FEZ$ resulta que es también altura del triángulo EFZ, por lo que EB es perpendicular a FZ. Pero también EB es perpendicular a AC, luego FZ y AC son paralelas.

Luego $\angle ZFB = \angle CAB = \angle ZDC$ y entonces el cuadrilátero $FBDZ$ es cíclico, por lo que

$$\angle BZF = \angle BDF = \angle BAC. \tag{6.3}$$



De manera similar se tiene que $DCEY$ es cíclico y entonces

$$\angle CYE = \angle CDE = \angle BAC. \tag{6.4}$$

De (6.3) y (6.4) se tiene que $\angle BZF = \angle CYE$, lo que concluye la demostración.

2. Soluciones de la OIM

2.1. Solución al problema 1

Digamos que un número es *ganador* si el jugador que en su turno se lo encuentre tiene una estrategia ganadora. De lo contrario, el número es *perdedor*. Es claro que todos los números del 671 al 2010 (inclusive) son ganadores, pues el que se encuentre con uno de ellos lo triplica y gana de inmediato.

En cambio 670 es perdedor, pues el que lo encuentre, haga lo que haga, deja un resultado en el rango anterior, 669 es ganador, pues al sumarle 1 deja 670 (que es perdedor) al contrario; 668 es perdedor, pues cualquier jugada le deja un número ganador al contrario; 667 es ganador, pues al sumarle 1 se le deja 668, que es perdedor, al contrario. Siguiendo de este modo se ve que en todo el rango de 335 al 670 (inclusive) los impares son ganadores y los pares perdedores.

Este patrón cambia con 334, pues al duplicarlo le queda 668 al contrario, que es perdedor. De este modo 334 es ganador, y lo mismo ocurre con todos los números en el rango del 168 al 334. Note que 167 es perdedor pues $167+1 = 168$ ganador, y $167 \times 2 = 334$ ganador y $167 \times 3 = 501$ ganador; 166 es ganador, pues al sumarle 1 se deja 167, que es perdedor.

Continuando de este modo se ve que en todo el rango del 56 al 167 los impares son perdedores y los pares ganadores. En el rango 27 al 55 los impares son ganadores (triplicando) y los pares son perdedores. En el rango 14 al 26 son todos ganadores (duplicando). En el rango 4 al 13 los pares son ganadores (sumando 1) y los impares son perdedores. Finalmente, 3 es ganador (triplicando) y 2 es perdedor.

Por lo tanto quien tiene una estrategia ganadora es Bruno. Su estrategia es puede resumir así: si Ana le deja 3, Bruno triplica. Si Ana le deja 4, 6, 8, 10 ó 12, Bruno suma 1. Si Ana le deja un número del 14 al 26, Bruno lo duplica. Si Ana le deja un impar del 27 al 55, Bruno lo triplica. Si Ana le deja un par del 56 al 166, Bruno le suma 1. Si Ana le deja un número del 168 al 334, Bruno lo duplica. Si Ana le deja un impar del 335 al 669, Bruno le deja 1. Si Ana le deja un número del 671 al 210, Bruno lo triplica, y así termina la demostración.

2.2. Solución al problema 2

Solución 1

Si $n = 2k$ para algún entero positivo k, podemos tomar $x = y = 3k$ y $z = -6k$ y se cumplen las condiciones del enunciado.

Si n es impar, demostraremos por contradicción que no existen x, y, z. Tenemos que $n(xy + yz + zx) = xyz$, y como $x + y + z = 0$, entonces

$$n^3 - n^2(x+y+z) + n(xy+yz+zx) - xyz = n^3,$$

o bien,

$$(n-x)(n-y)(n-z) = n^3.$$

Sean $p = n - x$, $q = n - y$, $r = n - z$, entonces $pqr = n^3$ y $p + q + r = 3n$. Aquí podemos descartar rápidamente el caso $n = 1$, pues es claro que la única solución es $p = q = r = 1$, lo que implica que $x = y = z = 0$. A partir de ahora, consideraremos $n \geq 3$.

Luego, sea $d = (p,q,r)$ con $p = dp'$, $q = dq'$, $r = dr'$. Como $d^3 \mid n^3$ entonces $d \mid n$, y sea $n = dk$. Luego, $p'q'r' = k^3$ y $p' + q' + r' = 3k$. Si algún primo t divide a p' y a q', entonces $t \mid k^3$, lo que implica $t \mid k$ y por tanto $t \mid r'$, lo que sería una contradicción, porque p', q', r' no pueden tener un factor primo común. Concluimos que p', q', r' son primos relativos dos a dos.

Por otro lado, como $p'q'r' = k^3$, tenemos que $p' = a^3$, $q' = b^3$, $r' = c^3$ (donde a, b, c son enteros), además $abc = k$ y $a^3 + b^3 + c^3 = 3k = 3abc$. Entonces

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 0,$$

pero a, b, c son impares pues son divisores de n^3, entonces $a + b + c \neq 0$. Por lo tanto

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = 0,$$

lo que implica $a = b = c$, es decir $p = q = r = n$ y $x = y = z = 0$, lo cual es una contradicción.

Solución 2

Sustituyendo $z = -(x+y)$ en la segunda condición y despejando se obtiene que

$$\frac{xy(x+y)}{x^2+xy+y^2} = n.$$

Sea $x = da$ y $y = db$, con $(a,b) = 1$, esto implica que

$$\frac{dab(a+b)}{a^2+ab+b^2} = n.$$

Es claro que $(ab, a^2+ab+b^2) = 1$. Además, si p es un primo que divide a $(a+b, a^2+ab+b^2)$ entonces p también divide a $ab = (a+b)^2 - (a^2+ab+b^2)$. De lo anterior se deduce fácilmente que p divide a (a,b), lo cual es una contradicción. Por lo tanto a^2+ab+b^2 divide a d, es decir, $d = (a^2+ab+b^2)k$, esto implica que

$$ab(a+b)k = n,$$

de lo anterior se sigue que n tiene que ser par, pues alguno de los términos a, b, $a+b$ debe ser par. Finalmente, para notar que todo par se puede representar de esta forma, tome $a=-2$, $b=1$. De esta forma $n=2k$. En efecto, para esta elección se tiene que $x=-6k$, $y=3k$, $z=3k$ y así

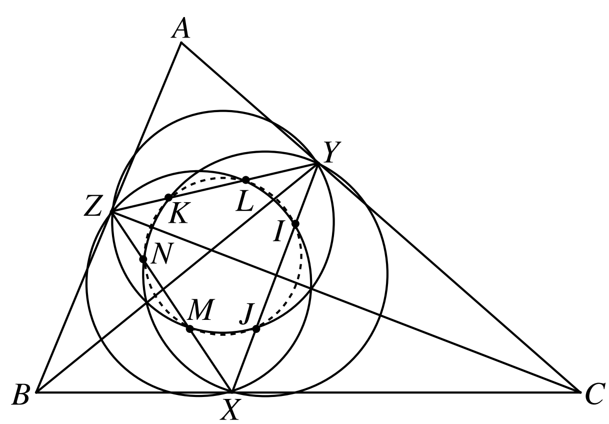
$$\frac{-1}{6k}+\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k}=\frac{1}{2k},$$

lo que concluye la prueba.

2.3. Solución al problema 3

Solución 1

Es conocido que las rectas AX, BY y CZ son concurrentes, digamos que concurren en H. Por hipótesis CZ es el eje radical de C_1 y C_2, y BY es el eje radical de C_1 y C_3, por lo que AX es el eje radical de C_2 y C_3 y H es el centro radical de las tres circunferencias.



Lema. *Sean ABC y XYZ como en el enunciado del problema. Sean I, N puntos sobre XY y ZX de manera que NI es paralela a YZ. Si L y K son puntos de intersección de la recta YZ con los circuncírculos de los triángulos ZXI y XYN, respectivamente. Entonces el punto de intersección U de LI con KN está sobre la recta AX.*

Demostración del lema. Como las medidas de los ángulos inscritos y ángulos semiinscritos que abren el mismo arco son iguales, se tiene $\angle ZXY = \angle AYZ = \angle AZY = \alpha$. Por ser cíclicos los cuadriláteros $XILZ$ y $XNKY$, se tiene que $\angle KLI = \angle LKN = \alpha$. Y por ser NI paralela a

YZ, $\angle KNI = \angle LIN = \alpha$, luego los triángulos AZY y UNI son semejantes y de lados paralelos, luego son homotéticos y como ZN y YI concurren en X, el centro de homotecia es X, por lo que X, U y A son colineales. $\diamond$

Regresemos a la solución del problema. Veamos que en realidad sí se tiene que NI es paralela a YZ. Sea I' sobre XY de manera que NI' es paralela a YZ. Consideremos a C_2' el circuncírculo de ZXI' y sea L' la intersección de tal circuncírculo con YZ. Por el lema anterior $L'I'$ y KN se cortan en un punto U que está sobre AX.

Además, como $L'UK$ y NUI' son isoscéles, se tiene que $UI' \cdot UL' = UN \cdot UK$. Luego el eje radical de C_2' y C_3 es la recta AX, por lo que C_2' pasa por el punto de intersección de C_2 y C_3 y entonces $C_2' = C_2$, y con esto $I' = I$ y $N' = N$. Por lo tanto NI es paralela a YZ. De manera análoga se puede demostrar que KJ es paralela a ZX y LM es paralela a XY.

Como NI es paralela a YZ y como $YZMJ$ es un cuadrilátero cíclico, tenemos que $\angle NIX = \angle ZYJ = \angle JMN$ lo que garantiza que $MNIJ$ están sobre una circunferencia Γ_1. De manera análoga $KLMN$ están sobre una circunferencia Γ_2, y también $IJKL$ está sobre una circunferencia Γ_3.

Si algún par de estas circunferencias son iguales, entonces las tres serán la misma. Pero si no fuera el caso, entonces el eje radical de Γ_1 y Γ_2 es ZX, el eje radical de Γ_2 y Γ_3 es YZ, y el eje radical de Γ_3 y Γ_1 es XY, pero estos tres deben concurrir, pero aquí no es el caso. Esta contradicción lleva a que las tres circunferencias son la misma y los seis puntos son concíclicos.

Solución 2

Presentamos otra forma posible de terminar. Igual que en la primera forma de terminar, tenemos que $KLMN$ está sobre una circunferencia. Con las ideas de la demostración del lema también se puede concluir que $KLNI$ es un cuadrilátero cíclico y análogamente $MNJK$ es un cuadrilátero cíclico. Con los dos primeros podemos garantizar que $KLMNI$ es cíclico y con el primero y tercero que $KLMNJ$ es cíclico, luego $KLMNIJ$ es cíclico.

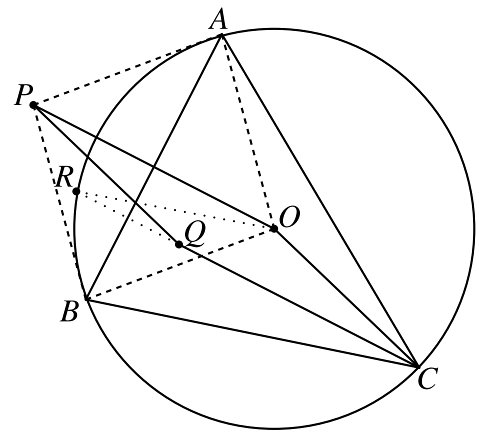
2.4. Solución al problema 4

Solución 1

El paralelogramo $BOAP$ es un rombo, ya que OA y OB son radios, luego OP y AB son perpendiculares. Como en el paralelogramo OP y CQ son paralelas, resulta que CQ es altura de ABC.

Sea R la reflexión de Q sobre AB. Como P es la reflexión de O sobre AB, entonces $OR = PQ = OC$, lo que implica que R está en el circuncírculo de ABC. Esto implica que Q es el ortocentro de ABC o es la reflexión de C sobre AB.

Suponga que Q es la reflexión de C sobre AB. Como $COPQ$ es un paralelogramo y CO es la reflexión de QP sobre AB entonces debe ser un rectángulo. Esto implica que CO es paralelo a AB, esto implica que CQ es tangente al circuncírculo de ABC.



Luego, C es el único punto en la altura y el circuncírculo. Puesto que la reflexión del ortocentro cae en el circuncírculo, se concluye que Q debe ser el ortocentro.

Solución 2

Se va a dar una prueba usando números complejos. Sea O el origen y sean a, b, c las coordenadas de A, B, C, respectivamente. Como $BOAP$ es un paralelogramo se sigue que la coordenada de P es $a+b$. Como $COPQ$ es un paralelogramo, la coordenada de Q es

$$(a+b)+c=3\cdot\frac{a+b+c}{3}.$$

Luego, si G es el baricentro del triángulo, lo anterior implica que $\overrightarrow{OQ}=3\overrightarrow{OG}$, de donde se concluye que Q es el ortocentro del triángulo.

2.5. Solución al problema 5

Suponga sin pérdida de la generalidad que $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n$. Se va a probar que la desigualdad se verifica si $a_k=(-1)^{k+1}$. Se va a mostrar por inducción sobre n. Si $n=2$ la desigualdad se reduce a $2x_2(x_1-x_2)\geq 0$; y si $n=3$ la desigualdad se reduce a $(x_1-x_2)(x_2-x_3)\geq 0$. Suponga que el resultado es cierto para n, se va aprobar para $n+2$.

Suponga primero que n es par, y sea $n=2m$. En este caso la desigualdad a demostrar es equivalente a

$$(x_1+\cdots+x_{2m-1}+x_{2m+1})(x_2+\cdots+x_{2m}+x_{2m+2})-\sum_{1\leq i<j\leq m+1}(x_{2i-1}x_{2j-1}+x_{2i}x_{2j})-\ldots$$
$$\cdots-\sum_{i=1}^{m+1}x_{2i}^2\geq 0.$$

Sea $S_{m+1}(x_1,x_2,\ldots,x_{2m+2})$ el lado izquierdo de la desigualdad anterior, se verifica la identidad

$$S_{m+1}(x_1,x_2,\ldots,x_{2m+2})=(x_1-x_2)(x_2-x_3+\cdots+x_{2m}-x_{2m+1}+x_{2m+2})+S_m(x_3,x_4,\ldots,x_{2m+2})$$

y la prueba se sigue por inducción.

Suponga que n es impar y sea $n = 2m+1$, la desigualdad a demostrar es

$$(x_1 + \cdots + x_{2m-1} + x_{2m+1})(x_2 + \cdots + x_{2m}) - \sum_{1 \le i < j \le m+1} x_{2i-1}x_{2j-1} - \sum_{1 \le i < j \le m} x_{2i}x_{2j} - \ldots$$

$$\cdots - \sum_{i=1}^{m} x_{2i}^2 \geq 0.$$

Sea $T_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{2m+1})$ el lado izquierdo de la desigualdad anterior, es sencillo demostrar

$$T_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{2m+1}) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3 + \cdots + x_{2m} - x_{2m+1}) + T_{m+1}(x_3, x_4, \ldots, x_{2m+1}),$$

y la prueba se sigue por inducción.

2.6. Solución al problema 6

Primero lo haremos para el caso $k = 2$. Supongamos que los colores son blanco y negro. Sean W_1, W_2,..., W_n las piedras blancas numeradas de izquierda a derecha. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea L_i la cantidad de piedras negras que haya a la izquierda de W_i y R_i la cantidad de piedras negras que haya a la derecha de W_i. Claramente se tiene la ecuación $L_i + R_i = n$ y si L y R se definen como $\sum_{i=1}^{n} L_i$ y $\sum_{i=1}^{n} R_i$ respectivamente, entonces tenemos $L + R = n^2$. El número de intercambios necesarios para mover todas las piedras blancas a la izquierda es L y para ponerlas a la derecha R, y cómo $\min(L, R) \leq \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$, entonces se sigue que $m \leq \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$.

Ahora, si n es par, en el arreglo $WBBW$, donde W y B son $\frac{n}{2}$ piedras consecutivas de color blanco y negro, respectivamente, $L = R = \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$. Si n es impar, el arreglo $WBwbBW$, donde W y B son $\frac{n-1}{2}$ piedras consecutivas de color blanco y negro, respectivamente,

$$L = \frac{n^2 - 1}{2} = \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor \quad \text{y} \quad R = \frac{n^2 + 1}{2} = \left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil,$$

luego $m = \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$, ya que estos arreglos necesitan exactamente $\lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$ intercambios.

a) Ahora procedemos por inducción sobre k para mostrar que $m_k = \frac{k(k-1)n^2}{4}$, donde m_k es el m correspondiente para un k fijo. El caso $k = 2$ ya está probado, que es el caso base. Primero, mostraremos que

$$m_k \leq \frac{k(k-1)n^2}{4}.$$

Consideremos una configuración cualquiera de $n(k+1)$ piedras, usando $k+1$ colores, n piedras de cada color. Sea C cualquier color y sean C_1, C_2,..., C_n las piedras de color C numeradas de izquierda a derecha. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea L_i la cantidad de piedras de color diferente a C a la izquierda de C_i y se define R_i análogamente hacia la derecha. Se tiene que $L_i + R_i = kn$, y nuevamente si definimos L y R como $\sum_{i=1}^{n} L_i$ y $\sum_{i=1}^{n} R_i$ respectivamente, entonces $L + R = kn^2$.

La cantidad de intercambios necesarios para mover todas las C piedras a la izquierda es L y a la derecha R, y como $\min(L,R) \leq \frac{kn^2}{2}$, usando la hipótesis de inducción,

$$m_{k+1} \leq \frac{kn^2}{2} + m_k = \frac{kn^2}{2} + \frac{k(k-1)n^2}{4} = \frac{k(k+1)n^2}{4}.$$

Ahora, sea K_i un conjunto de $\frac{n}{2}$ piedras consecutivas de color i y considere el arreglo

$$K_1K_2\cdots K_nK_n\cdots K_2K_1.$$

Los L's y los R's son los mismos para cada color, y después un color a cualquier lado, ya se habrían usado $\frac{(k-1)n^2}{2}$ intercambios, con un nuevo arreglo de tipo

$$K_1K_2\cdots K_{i-1}K_{i+1}\cdots K_nK_n\ldots K_{i+1}K_{i-1}\cdots K_2K_1K_iK_i$$

o

$$K_iK_iK_1K_2\cdots K_{i-1}K_{i+1}\cdots K_nK_n\ldots K_{i+1}K_{i-1}\cdots K_2K_1.$$

Usando inducción nuevamente, se tiene que este arreglo necesita exactamente $\frac{k(k-1)n^2}{4}$ intercambios.

b) La respuesta es $\frac{3n^2-1}{2}$. Usando las mismas ideas de la parte anterior, para cada color C' tenemos $L_i + R_i = 2n$, entonces $L + R = 2n^2$ y $\min(L,R) \leq n^2$. Después de mover un color hacia algún lado, habríamos usado a lo más n^2 intercambios y nos queda el caso $k = 3$, que ya está probado, así que el máximo m posible es $n^2 + \frac{n^2-1}{2} = \frac{3n^2-1}{2}$. Si A, B y C son bloques de $\frac{n-3}{2}$ piedras consecutivas de colores a, b y c, respectivamente, y las letras en minúscula denotan una sola piedra de ese color, el arreglo

$$ABCabcbcacabCBA$$

necesitaría exactamente $\frac{3n^2-1}{2}$ intercambios, luego $m = \frac{3n^2-1}{2}$, y así concluye la demostración.

Bibliografía

[1] Sociedad Matemática Mexicana (SMM) y Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Reporte de la XIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. Colima, México, junio del 2011.

[2] Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR). Reporte de la 26 Olimpiada Iberoamericana de Matemática. San José, Costa Rica, septiembre del 2011.

Bibliografía General

[1] Anfossi, A. *Curso de Trigonometría Rectilínea.* México: PROGRESO, 1967.

[2] Derrik, W. *Variable Compleja con Aplicaciones.* México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1989.

[3] Gutiérrez, W. Introducción a TEX y LATEX 2_ε. Facultad de Ingeniería, USAC, Guatemala, 2010.

[4] Hohenwarter, M. Documento de ayuda de GeoGebra — Manual Oficial de la Versión 3.2. Traducción de Liliana Saidon (Centro Babbage), `www.geogebra.org` (mayo de 2010).

[5] Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR). Reporte de la 26 Olimpiada Iberoamericana de Matemática. San José, Costa Rica, septiembre del 2011.

[6] Larson, R. y otros. *Cálculo*. 8.ª edición. México: McGraw-Hill, 2006.

[7] Sociedad Matemática Mexicana (SMM) y Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Reporte de la XIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. Colima, México, junio del 2011.

[8] Stewart, J. y otros. *Precálculo — Matemáticas para el Cálculo.* 5.ª edición. México: Editorial Thomson, 2007.

[9] Swokowski, E.W. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* 2.ª edición. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1988.

[10] Weisstein, E. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics.* EUA: Chapman & Hall/CRC, 1999.

[11] Zill, D. y otros. *Álgebra y Trigonometría.* 2.ª edición. México: McGraw-Hill, 1992.