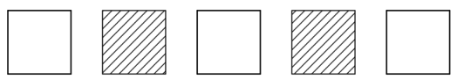
Prueba de Matemática de Segundo Básico
Competencia Regional

Instrucciones: A continuación se presentan cinco problemas para su solución. Es importante dejar constancia de todas las operaciones y procedimientos que justifiquen las respuestas dadas. Los aspectos que se evaluarán son: orden, limpieza, validez de los procedimientos utilizados y corrección de las respuestas dadas. Tiempo disponible: dos horas y media.

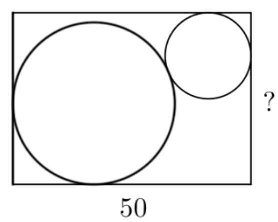
Tema 1 (20 pts)
Las letras a y b representan números desconocidos. Hallar el valor de ab si se sabe que:

$$a + 2b = 10$$
$$a^2 + 4b^2 = 82$$

Tema 2 (20 pts)
De cuántas formas distintas se pueden rellenar las 5 casillas con los dígitos del 1 al 5, usando cada dígito exactamente una vez, de forma que cada número en una casilla sombreada sea mayor que sus dos vecinos.

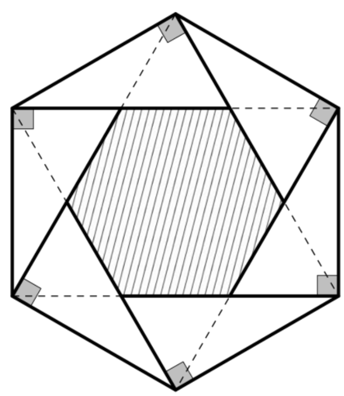


Tema 3 (20 pts)
La figura muestra dos círculos en el interior de un rectángulo cuya base es 50 centímetros. El menor círculo tiene un radio de 9 centímetros, mientras que el radio del mayor es de 17 centímetros. Hallar la altura del rectángulo.



Tema 4 (20 pts)
Sofía escribió un listado muy largo de números pares empezando por dos y terminando en un millón. Luego borró todos los múltiplos de 3 de su listado, obteniendo un nuevo listado: 2, 4, 8, 10, 14, etc. ¿Cuál es el centésimo número del nuevo listado?

Tema 5 (20 pts)
Hallar el área del hexágono grande si el área del hexágono pequeño, que se muestra sombreado en el dibujo, es 60 centímetros cuadrados.



Soluciones completas:

Tema 1.

Se debe reconocer que si uno eleva al cuadrado $a + 2b,$ el trinomio cuadrado perfecto incluye los términos de la segunda condición.

$$(a + 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$$

Sustituyendo los valores dados queda así:

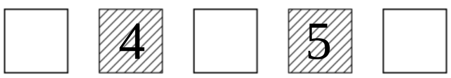
$$(10)^2 = 82 + 4ab$$

De allí se deduce que ab es $\frac{9}{2}$, despejando la expresión.

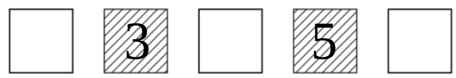
Tema 2.

Si el 5 estuviera en una casilla blanca, sería mayor que alguna casilla sombreada vecina suya, por lo que el 5 tiene que estar en una sombreada. Es bastante razonable colocar el 5 y el 4 en las sombreadas, pero el 5 con el 3 también funciona. El 5 con el 2 o el 1 ya no funciona, porque entre los dos vecinos, habrá uno que lo supere, así que sólo hay dos casos:

Caso 1:



Caso 2:



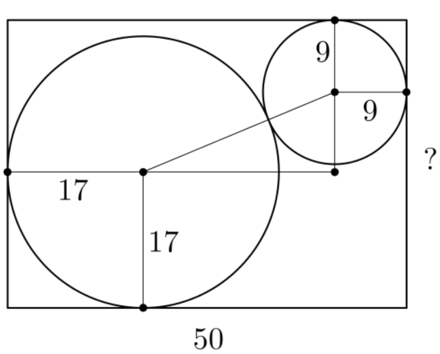
En el caso 1 hay que colocar los números 1,2,3 en las casillas blancas, en cualquier orden:
123, 132, 213, 231, 312, 321. Hay 6 formas, pero como se pueden intercambiar el 4 y el 5, con lo cual se duplica, esto es, hay 12.

En el caso 2, el 3 debe forzosamente estar acompañado por el 1 y el 2, de lo contrario se incumplirían las reglas. Entonces en las casillas blancas pueden estar: 124, 214. Hay 2 opciones, pero como el 3 y el 5 se pueden intercambiar, se duplica, es decir, 4 en total.

Sumando los casos: **12 + 4 = 16**. Ésta es la respuesta final, pero como es tan pequeña, se puede también buscar por fuerza bruta sin ser demasiado meticuloso con los órdenes, la única parte crucial es reconocer que en las casillas sombreadas van 4 y 5, o 3 y 5.

Tema 3.

Se dibujan estas líneas:



Allí es fácil notar que el triángulo rectángulo del dibujo tiene hipotenusa: 17 + 9 = 26. La base del triángulo rectángulo es: 50 - 17 - 9 = 24.

Usando Pitágoras concluimos que la altura del triángulo es 10. Luego, la altura del rectángulo es 10 + 17 + 9 = 36.

Tema 4.

Miremos una parte del listado original de Sofía:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, …

Los números en rojo los borra en el segundo paso descrito. Note que abajo del 6 no fueron borrados 2 números. Abajo del 12 sobrevivieron 4, mientras que abajo del 18 sobrevivieron 6, etc. Abajo del 60 sobrevivieron 20. Abajo del 300 sobrevivieron 100. Así que el centésimo número va justo antes del 300, es 298.

Tema 5.

El área de un hexágono, dado su lado, es: $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ell^2$, si el alumno no lo recuerda, puede partir en seis equiláteros al hexágono y usar Pitágoras para sacar la fórmula. Ahora lo crucial es notar que hay seis equilateritos rodeando al hexagonito, que junto con el hexagonito forman una estrella. Luego, el lado del hexagonito ℓ también es igual a los lados de los equilateritos que son las puntas de la estrella. Entonces, cada uno de los seis **triángulos rectángulos** marcados en la figura (los que se asemejan a un obturador de cámara fotográfica) son tales que su hipotenusa es el doble del lado del hexágonito ℓ, mientras que uno de sus catetos es igual a ℓ, se aplica Pitágoras para calcular el otro cateto, que resulta ser $\sqrt{3}\,\ell$. Este cateto es simultáneamente el lado del hexágono grande, y aplicando la fórmula del área del hexágono, resulta ser el triple del área del hexagonito, esto es: 180cm^2. Usando este procedimiento es innecesario recordar la fórmula del área del hexágono, o incluso deducirla, mientras se recuerde que la proporcionalidad de áreas es cuadrática, esto es, que si los lados de una figura se multiplican por un factor, entonces el área se multiplica por el cuadrado del factor. En este caso, si el lado del hexágono grande se calcula del lado del pequeño multiplicando por $\sqrt{3}$, entonces su área debe ser el triple. Una solución más tediosa es emplear la fórmula para calcular el valor de ℓ explícitamente, para luego ir obteniendo cada uno de los otros datos.